Ф.Л. Зак
ЦЭМИ РАН, Москва

Налогообложение в вальрасовской экономике*

Рассматриваются две модели налогообложения в экономике чистого обмена, в которых государство облагает налогом экономических агентов, характеризующихся функциями спроса и начальными запасами (или оказывает им финансовую помощь). В первой модели государство имеет свои предпочтения и выходит на рынок с собранными средствами, максимизируя свою функцию полезности, а во второй – тратит собранные налоги на закупку фиксированных ресурсов, необходимых для своего функционирования. Исследуются существование и структура равновесий в экономиках общего положения, возможность использования налогообложения для реализации распределений, оптимальных по Парето, и роль налогообложения в качестве одной из возможных причин инфляции. Особое внимание уделяется экономикам с валовой заменимостью.

Ключевые слова: **паушальный налог, равновесие, экономика чистого обмена, регулярная экономика, ценообразование.**
Классификация JEL: C65, D31, D51, D61, D63, H21, H24, H31.

Введение

Классическая модель Эрроу–Дебре является образцовой как с точки зрения естественности экономических постановок, так и с точки зрения математического изящества. Тем не менее, в последние годы большое внимание уделяется исследованию различных модификаций модели Эрроу–Дебре, в которых учитываются манипулирование, рационирование, социальная политика и другие обстоятельства, остававшиеся ранее за рамками моделей рыночной экономики. В современной экономической обстановке представляются слишком ограничительными предположения неоклассиков о том, что государство не играет роли в экономике либо играет пассивную роль. Все более осознается необходимость построения моделей *смешанной экономики*, в которой действуют законы рынка, но активная роль отводится и государству. В настоящей работе рассматриваются две простые модели такого типа, в которых государство осуществляет финансовое регулирование в вальрасовской экономике без производства, распределяя налоговое бремя в виде *паушального* (подушевой, вмененный) налога между участниками.

Налоговое регулирование и государственный спрос на продукты и услуги являются основными инструментами воздействия государства на рыночную экономику, однако предположение, что государство индивидуально устанавливает размер налога для участников, может показаться довольно экзотическим. Действительно, в современной практике паушальный налог, как правило, уплачивают мелкие предприниматели, результаты деятельности которых с трудом поддаются учету.

[1] Автор благодарен В. М. Полтеровичу за полезные обсуждения и анонимному рецензенту за ценные замечания.

Однако при условии достаточного агрегирования гипотеза паушальности представляется правдоподобной и в более широком контексте. Государство изменяет систему налогообложения, варьируя веса разных видов налогов, вводя налоговые льготы и т.п., но при этом создается впечатление, что нередко происходит подгонка суммарного налога на отрасли или крупные компании под заранее определенную величину, установленную исходя из потребностей бюджета, активности различных лоббистских групп и т.д. Некоторые виды налогов на собственность, оборот которой ограничен (например, недвижимость), также близки к паушальным.

Еще более уместной гипотеза паушальности представляется в случае отрицательных налогов, т.е. финансовой помощи, причем речь идет не только о помощи малообеспеченным слоям населения (и о пенсионных выплатах, которые зачастую на самом деле осуществляются государством), но, как показал последний финансовый кризис, и об адресной помощи промышленным и финансовым группам.

Предположение о паушальности системы налогообложения позволяет на уровне простых и красивых моделей исследовать некоторые эффекты, связанные с вмешательством государства в рыночную экономику, избегая при этом сложного и запутанного моделирования динамики производства и тонких современных механизмов налогообложения.

Различные варианты подушевого налога на домохозяйства были весьма распространены, начиная с глубокой древности. Часто подушевой налог был равномерным (не зависел от домохозяйства), но нередко, как, например, в Англии XVII в., он был дифференцирован (Hahn, 1973). В период с конца XIX до середины XX в. подушевой налог в ряде штатов США фактически играл роль избирательного ценза. Введение правительством М. Тэтчер паушального налогообложения домохозяйств в 1989 г. привело к массовым протестам и отставке правительства в 1990 г. (Mankiw, Weinzierl, Yagan, 2009). В настоящее время наиболее известен (неравномерный) паушальный налог на домохозяйства состоятельных иностранцев (в том числе и российских миллиардеров) в ряде кантонов Швейцарии. За последние годы паушальное налогообложение было также введено в Словакии, Румынии и Грузии. Что касается паушальных субсидий (т.е. налогов со знаком минус, или государственных выплат), то они в разных видах распространены повсеместно (Mirrlees, 2005).

К достоинствам паушальной системы налогообложения обычно относят ее Парето-эффективность (впервые на это обратил внимание Эрроу в так называемой второй теореме экономики благосостояния (см. (Hahn, 1973; Harford, 2006; Mankiw, Weinzierl, Yagan, 2009), а также теоремы 2, 3 и 9 настоящей статьи). В отличие от других видов налогов паушальный не изменяет поведения экономических агентов и, таким образом, позволяет добиться более «справедливого» распределения благ, не жертвуя экономической эффективностью (эти соображения лежат в основе многочисленных политических решений типа «монетизации льгот»).

Такие видные экономисты, как П. Самуэльсон и Ф. Хан (Hahn, 1973), указывали, что паушальный налог является оптимальным с точки зрения совмещения эффективности и социальной справедливости. Дж. Мирлиз (Mirrlees, 2005), напротив, делал упор на нежелание экономических агентов предоставлять информацию, необходимую для разумного распределения налогового бремени, и считал это непреодолимым препятствием для применения сложных паушальных схем с неравномерными налогами. Следует, впрочем, отметить, что в последнее время стало ясно, что приблизиться к оптимальному налогообложению доходов можно только принимая во внимание дополнительные характеристики экономических агентов, такие как образование, пол, возраст, рост и другие физические данные и, что еще важнее, национальные и культурные особенности (Mankiw, Weinzierl, Yagan, 2009). Но такая индивидуализация налога по сути означает его приближение к паушальному (что и объясняет повышение эффективности).

Ряд авторов рассматривал эффекты лоббирования, в том числе и в экономиках с паушальным налогообложением. В (Besharov, 2003) показано, что паушальное налогообложение с неравномерными налогами оптимально только в случае если государство придает достаточно большой вес общественному благосостоянию.

Исследование паушального налогообложения с точки зрения общей теории экономического равновесия было предпринято в цикле работ И. Баласко и К. Шелла (Balasko, Shell, 1985, 1993), но предположения в этих работах носят весьма ограничительный характер (в частности, считается, что государственное потребление отсутствует, а роль государства (чисто социальная) сводится к перераспределению доходов между участниками (см. замечание в начале разд. 2 настоящей работы)).

Перейдем к краткому изложению результатов статьи.

В разд. 1 исследуется модель, в которой государство облагает участника k, обладающего начальными запасами x_k, $k = 1,\ldots,m$, налогом α_k и выходит со своими налоговыми поступлениями $\alpha = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$ на рынок, участвуя, таким образом, в распределении ресурсов $x = \sum_{k=1}^{m} x_k$ между $m + 1$ участником. Оказывается (теорема 1), что в такой экономике всегда существует состояние равновесия и почти всегда множество равновесных цен одномерно. Варьируя сумму налогов α, перераспределяя налоговое бремя между участниками и рассматривая всевозможные состояния равновесия, можно получить произвольные Парето-оптимальные распределения ресурсов x между $m + 1$ участником (теоремы 2 и 3). Однако при выборе наиболее благоприятной равновесной цены интересы различных экономических агентов приходят в противоречие друг с другом, причем при достаточно больших ценах государству и участникам, которые получают дотации, выгодно снижение цен, а некоторые другие участники заинтересованы в инфляции (теорема 4).

Подробно исследуются экономики с валовой заменимостью. Множество состояний равновесия в такой экономике диффеоморфно лучу, вдоль которого цены на все продукты монотонно возрастают (теорема 5), причем все состояния равновесия устойчивы по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования (теорема 6). Государство и получатели дотаций заинтересованы в установлении минимальных равновесных цен, но существуют и сторонники повышения цен (теоремы 4 и 7).

Таким образом, эта модель имеет ряд важных отличий от стандартной модели чистого обмена (модели Эрроу–Дебре), множество состояний равновесия в которой, как правило, конечно. Более того, цикличность цен может возникнуть уже на уровне ценообразования (множества равновесных цен в экономике общего положения могут содержать кривые, гомеоморфные окружности), но при достаточно высоких ценах этот эффект исчезает, и возникает конфликт интересов: государство и ряд других участников заинтересованы в ограничении инфляции (которая, в частности, обесценивает налоговые поступления), но всегда имеются и экономические агенты, которым выгодна инфляция (она приводит к снижению реального налогового бремени).

В разд. 2 рассматривается модель налогообложения, отличающаяся от модели из разд. 1 тем, что государство заранее фиксирует ресурсы y, необходимые для его функционирования, а изъятые в виде налогов деньги полностью идут на закупку этих ресурсов. В этом случае цель налогообложения – уменьшение покупательной способности экономических агентов до такого уровня, чтобы по завершении торговли часть продуктов в количестве y осталась нераспроданной и отошла государству. В отличие от модели из разд. 1 равновесие в модели из разд. 2 не обязательно существует. Тем не менее удается получить разумные достаточные условия существования равновесия (теорема 8).

Еще одно отличие от модели из разд. 1 состоит в том, что почти для всех распределений начальных запасов существует лишь конечное число равновесных цен. Как и в предыдущей модели, государство может добиться произвольного Парето-оптимального распределения ресурсов $x - y$ между m участниками с помощью различных вариантов налогообложения (теорема 9). В случае валовой заменимости состояние равновесия единственно, но не устойчиво по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования (теорема 10 и замечание после ее доказательства).

Таким образом, описанная модель (с фиксированными ресурсами, необходимыми для функционирования государства) имеет как сходство со стандартной моделью чистого обмена (конечность состояний равновесия для экономики общего положения, реализуемость Парето-оптимальных состояний как состояний равновесия, единственность состояния равновесия в случае валовой заменимости), так и ряд существенных отличий. В частности, для существования равновесия приходится накладывать дополнительные условия, а (при условии положительности ресурсов, потребляемых государством) вальрасовский процесс ценообразования не является (ни локально, ни глобально) устойчивым даже в случае валовой заменимости. В отличие от экономики чистого обмена матрица маргинального избыточного спроса $\partial E / \partial p$ в этом случае имеет положительное собственное значение; подробно этот феномен обсуждается в замечании после теоремы 10.

В то время как в модели чистого обмена (ненормированные) равновесные цены в экономике общего положения образуют конечное число лучей, в первой модели эти лучи «искривляются», преобразуясь в некоторое одномерное многообразие с краем, а во второй модели существует уже конечное множество ненормированных равновесных цен. Это обстоятельство и приводит, с одной стороны, к появлению новых механизмов управления равновесием, а с другой – к сбоям привычных механизмов ценообразования.

Изложенный в статье подход к исследованию состояний равновесия в экономике с паушальным налогообложением основан на использовании методов дифференциальной топологии, введенных в арсенал математической экономики Ж. Дебре (Debreu, 1970, 1972), И. Баласко (Balasko, 1975, 1979) и др. Существование равновесий можно вывести и в рамках общей теории, развитой в (Полтерович, 1990, гл. 2), но дифференциально-топологический подход представляется особенно удобным для исследования структуры состояний равновесия и их зависимости от параметров (таких как начальные запасы, налоги и общественное потребление).

В статье использованы стандартные обозначения, принятые при дифференциально-топологическом подходе (Balasko, 1975, 1979). В частности, $\mathbb{R}_+^l$ обозначает (строго) положительный (вещественный) ортант; а $\overline{\mathbb{R}}_+^l$ – его замыкание (неотрицательный ортант); $p \in \mathbb{R}_+^l$ – вектор цен; $u_i : \overline{\mathbb{R}}_+^l \to \mathbb{R}$ и w_i – соответственно функцию полезности и доход участника i; $f_i : \mathbb{R}_+^l \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+^l$ – соответствующую функцию спроса (здесь l – число товаров).

1. Налоговое регулирование при фиксированных налоговых поступлениях

В модели имеется l продуктов и m экономических агентов, причем агент k располагает начальным запасом продуктов в размере $x_k \geq 0$, и государство, не располагающее продуктами. Государство распределяет налоговое бремя ($\alpha \geq 0$) между *m* участниками, так что участник *k* облагается налогом α_k, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \alpha$ (заметим, что мы не предполагаем, что все налоги α_k неотрицательны: $\alpha_k < 0$, если, исходя из каких-либо соображений, государство оказывает экономическому агенту *k* финансовую помощь $-\alpha_k$ за счет части налоговых поступлений от остальных агентов). В результате на рынок выходят *m* участников, доходы которых определяются стоимостью их начальных запасов за вычетом налогов, и государство, не предлагающее никаких товаров, но желающее закупить их на сумму налоговых поступлений α.

Пусть $f_k(p, w_k)$, $k = 1,\ldots,m$, – функции спроса участников; $f_0(p, w_0)$ – функция спроса государства при ценах *p* и доходах w_r, $0 \leq r \leq m$. Будем считать, что $f_r : \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^l_+$, $f_r(\mathbb{R}^l_+ \times 0) = 0$ и функции f_r порождены строго монотонными строго вогнутыми трижды непрерывно дифференцируемыми функциями полезности $u_r : \overline{\mathbb{R}}^l_+ \to \mathbb{R}$, т.е. $f_r(p, w_r) = \arg\max u_r(z)$, $z \in \overline{\mathbb{R}}^l_+$, $z \in \overline{\mathbb{R}}^l_+$, $\langle p, z \rangle \leq w_r$, $r = 0,\ldots,m$. Согласно (Debreu, 1972), в этом случае функции спроса дважды непрерывно дифференцируемы.

Как обычно, для получения содержательных результатов приходится ввести некоторое граничное условие. Будем предполагать, что функция совокупного спроса $f(p; w_0,\ldots, w_m) = \sum_{r=0}^{m} f_r(p, w_r)$ удовлетворяет следующему *условию желательности* (Balasko, 1975; Debreu, 1970; Зак, 1981).

Пусть $p_n \to \overline{p}$, $p_n \in \mathbb{R}^l_+$, $\overline{p}^j = 0$ $\exists j$, $1 \leq j \leq l$, и пусть

$$\underline{\lim}\, w_n > 0, \quad w_n = (w_0)_n + \cdots + (w_m)_n. \tag{DES}$$

Тогда $\| f\big(p_n; (w_0)_n, \ldots, (w_m)_n\big) \| \to \infty$ (здесь, как обычно, $\underline{\lim}$ обозначает нижний предел).

Условие (DES) означает, что при ненулевом совокупном доходе безудержное падение цен на некоторые товары приводит к неограниченному росту совокупного спроса. Это условие можно было бы несколько ослабить, но и в таком виде оно представляется достаточно реалистичным для больших экономик, допускающих многоцелевое использование ресурсов.

Равновесные цены в нашей модели описываются решениями системы уравнений

$$f_0(p, \alpha) + \sum_{k=1}^{m} f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) = x, \tag{1}$$

где $x = \sum_{k=1}^{m} x_k > 0$, *p* – положительный вектор цен, $w_k = \langle p, x_k \rangle - \alpha_k \geq 0$, $k = 1,\ldots,m$. Удобно считать, что экономика задается точкой

$$\omega \in \Omega = \Big\{ (x_k^j, \alpha_k) \Big| x_k^j \geq 0,\ x^j = \sum_{k=1}^m x_k^j > 0,\ \alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k \geq 0,$$
$$k = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, l \Big\} \subset \overline{\mathbb{R}_+^{lm+m}}.$$

Изучение состояний равновесия естественно интерпретируется как исследование многообразия (с краем) $W \subset \mathbb{R}^{lm+l+m}$,

$$W = \Big\{ (\omega, p) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^l \ \Big| \langle p, x_k \rangle \geq \alpha_k,$$
$$f_0(p, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m) + \sum_{k=1}^m \big[f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) - x_k \big] = 0 \Big\}.$$

Многообразие W называется *соответствием Вальраса.* Пусть $\pi : W \to \Omega$ – ограничение на W отображения проектирования $\Omega \times \mathbb{R}_+^l$ на первый сомножитель. Тогда точки слоя $\pi^{-1}(\omega)$ соответствуют равновесным ценам в экономике ω.

Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0,$ то наша модель сводится к модели чистого обмена. В этом случае множество равновесных цен выдерживает умножение на $\mathbb{R}_+$ и для экономики общего положения состоит из конечного (и даже нечетного) числа лучей, исходящих из начала координат (Balasko, 1975). В общем случае это не так.

Лемма 1. *Предположим, что* $\alpha_k \neq 0$ *для некоторого участника k,* $1 \leq k \leq m.$ *Тогда в некоторой окрестности U точки* ω *в* Ω *равновесные цены отделены от нуля, т.е. существует константа* $C > 0$ *такая, что для всякой экономики* $\omega' \in U$ *и всякого равновесного вектора цен p в* ω' *выполнено неравенство* $p^j > C$, $j = 1, \ldots, l.$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют последовательность экономик $\omega_n \to \omega$ и последовательность векторов p_n равновесных цен в ω_n такие, что $p_n^j \to 0$ для некоторого j, $1 \leq j \leq l.$ Если $\alpha_k < 0$ для некоторого k, $1 \leq k \leq m,$ то $w_k = \langle p, x_k \rangle - \alpha_k > -\alpha_k > 0,$ а если все α_i неотрицательны, то $w_0 = \alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k > 0.$ В обоих случаях из условия (DES) вытекает, что $\| f(p_n, \omega_n) \| \to \infty$ вопреки тому, что по условию $f(p, \omega_n) = x(\omega_n) \to x(\omega),$ где $f(p_n, \omega_n) = f_0(p_n, \sum_{k=1}^m (\alpha_k)_n) + \sum_{k=1}^m f_k \left(p_n, \langle p_n, (x_k)_n \rangle - (\alpha_k)_n \right).$ ■

Следствие. *Пусть* $W^n = W \cap \left\{ \sum_{j=1}^l \gamma_j p^j = P \right\}, \quad \gamma = \sum_{j=1}^l \gamma_j > 0, \quad P > 0$ *(т.е. цены нормированы произвольным линейным – хотя это и непринципиально – способом). Тогда* $\pi^n = \pi|_{W^n}$ *– собственное отображение (т.е. прообраз любого компакта компактен).*

Лемма 2. *Пусть* $\omega, \omega_n \in \Omega$, $\omega_n \to \omega$, *и пусть* p_n *– последовательность равновесных векторов цен в* ω_n. *Тогда для всех t, s,* $1 \leq t, s \leq l,$ *выполнено соотношение* $p^t = O(p^s)$, *т.е. существуют константы* $0 < c_{t,s} < C_{t,s} < \infty$ *такие, что для всех n имеем* $c_{t,s} < p_n^t / p_n^s < C_{t,s}$.

Доказательство. Предположим противное. Переходя к подпоследовательности, без ущерба для общности можно считать, что $p_n^t / p_n^s \to 0$. Поскольку функции f_k порождены отношениями предпочтения, они однородны степени нуль, так что

$$f(p_n,\omega_n) = f_0\left(\frac{p_n}{p_n^s},\frac{(\alpha_1)_n+\cdots+(\alpha_m)_n}{p_n^s}\right)+\sum_{k=1}^{m} f_k\left(\frac{p_n}{p_n^s},\left\langle\frac{p_n}{p_n^s},(x_k)_n\right\rangle-\frac{(\alpha_k)_n}{p_n^s}\right)=x_n.$$

Из закона Вальраса и условия (DES) вытекает, что $\left\langle p_n / p_n^s, x_n\right\rangle \to 0$. С другой стороны, $\left\langle p_n / p_n^s, x_n\right\rangle \geq x_n^s$, и, поскольку $x^s > 0$, мы приходим к противоречию. ■

Перейдем к более подробному исследованию соответствия Вальраса *W*. В качестве координат в Ω возьмем x_k^j, α_k, $k=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,l$, а в качестве координат в W – x_k^j, $k = 1,\ldots,\hat{\imath},\ldots,m$, $j=1,\ldots,l$; $p^1,\ldots,p^l$; $w_1,\ldots,w_m$, α, где $\alpha=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k$, а $w_k=\left\langle p,x_k\right\rangle-\alpha_k$ – чистый доход участника *k* (здесь *i*, $1\leq i\leq m$ – произвольный наперед выбранный экономический агент). Уравнения

$$x_i^j = f_0^j(p,\alpha)+\sum_{k=1}^{m} f_k^j(p,w_k)-\sum_{k\neq i} x_k^j,\quad \alpha_k=\left\langle p,x_k\right\rangle-w_k,\quad k\neq i,\quad \alpha_i=\alpha-\sum_{k\neq i}\alpha_k$$

показывают, что указанные функции всюду в *W* образуют систему координат, так что $\dim W = ml+m+1=\dim\Omega+1$ и для произвольного открытого подмножества $U\subset\Omega$ прообраз $\pi^{-1}(U)$ – топологическое многообразие с краем $\pi^{-1}(U)\cap(\{w_1=0\}\cup\ldots\cup\{w_m=0\})$. Другими словами, $\partial_\Omega W=\{w_1=0\}\cup\ldots\cup\{w_m=0\}$ – (относительный) край многообразия *W* над Ω, причем гладкая структура на *W* индуцирует гладкую структуру на $\partial_\Omega W\setminus\partial_b W$, где $\partial_b W=\bigcup_{k_1,k_2=1,k_1\neq k_2}^{m}\{w_{k_1}=w_{k_2}=0\}$.

Ясно, что $\pi(\partial_\Omega W)\subset\Omega\setminus\{\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0\}$. При этом имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Отображение* $\pi:\partial_\Omega W\to\Omega$ *собственно над* $\Omega\setminus\{\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0\}$.

Доказательство. Пусть $\omega\in\Omega\setminus\{\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0\}$ – произвольная экономика. Из леммы 1 вытекает, что в достаточно малой окрестности ω равновесные цены отделены от нуля. Если какая-то равновесная цена p^j не ограничена в окрестности ω, то из леммы 2 следует, что и все цены p^t, $t=1,\ldots,l$ также не ограничены, и если $w_i=0$, т.е. $\alpha_i=\left\langle p,x_i\right\rangle$, то $x_i=0$ вопреки определению Ω. ■

Замечание. Аналогично доказывается, что для всякого *i* $1\leq i\leq m$ и $C>0$ отображение $\pi|_{\{(\omega,p)\in W|w_i=C\}}$ собственно.

Предложение 1. *Отображение* $\pi|_{\partial_\Omega W}:\partial_\Omega W\to\Omega\setminus\{\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0\}$ *сюръективно, т.е.* $\pi(\partial_\Omega W)=\Omega\setminus\{\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0\}$. *Другими словами, если государство проводит активную финансовую политику (т.е.* $\alpha_k\neq 0$ *для некоторого k,* $1\leq k\leq m$ *), то существует состояние равновесия, при котором (хотя бы) у одного из участников в качестве налога изымаются все доходы, получен-*

ные от продажи его начальных запасов. Более того, почти для всех (т.е. всех за исключением подмножества меры нуль) экономик $\omega \in \Omega \setminus \{\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0\}$ *прообраз* $(\pi|_{\partial_\Omega W})^{-1}(\omega)$ *состоит из нечетного числа точек.*

Доказательство. Рассмотрим точку из $\partial_\Omega W \setminus \partial_b W$, лежащую на «грани» $w_i = 0$, и вычислим дифференциал $\pi|_{\partial_\Omega W}$ в этой точке. Сделать это удобно в системе координат $x_k^j;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_m;\ p^j$, $k = 1,\ldots,j,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,l$ (поскольку $\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k$, $w_k = < p, x_k > - \alpha_k$, $k \neq i$, эти функции вместе с w_i образуют систему координат на W). Ясно, что в этой системе координат матрица Якоби имеет вид

$$d\pi|_{\partial_\Omega W} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{(m-1)l} & 0 & \\ 0 & \mathrm{Id}_m & * \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где Id – единичная матрица, * – некоторая матрица порядка $(lm - l + m) \times l$, а J – $l \times l$-матрица с элементами

$$J_{tj} = \frac{\partial f_0^j}{\partial p^t}(p, \alpha) + \sum_{k \neq i} \frac{Df_k^j}{Dp^t}(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k).$$

Пусть теперь $\omega \in \Omega$ – экономика, для которой $x_k(\omega) = x_k$, $k = 1,\ldots,m$, $\alpha_k(\omega) = 0$, $k \neq i$, $\alpha_i = \alpha$. Тогда

$$J_{tj} = \frac{\partial g^j}{\partial p^t}(p; w_1,\ldots,w_m) + \sum_{k \neq i} \frac{\partial g_k^j}{\partial w_k}(p, w_k) x_k^t,$$

где

$$g_k(p, w_k) = \begin{cases} f_k(p, w_k), & k \neq i, \\ f_0(p, w_0), & k = i, \end{cases} \quad w_k = \begin{cases} \langle p, x_k \rangle, & k \neq i, \\ \alpha, & k = i, \end{cases} \quad 1 \le k \le m, \quad g = \sum_{k=1}^m g_k.$$

Поскольку $w_i = 0$, $\alpha = \alpha_i = \langle p, x_i \rangle$ и, следовательно, $J_{tj} = \frac{\partial E^j}{\partial p^t} - \frac{\partial g_i^j}{\partial w_i} x_i^t$, где $E(p) = \sum_{k=1}^m [g_k(p, \langle p, x_k \rangle) - x_k]$ – функция избыточного спроса в экономике чистого обмена с m экономическими агентами, где агент k имеет функцию спроса g_k и начальные запасы x_k. При условии (1), множество равновесных цен p в экономике ω, для которых $(\omega, p) \in \partial_\Omega W$, совпадает с множеством равновесных цен p в экономике чистого обмена с функциями спроса g_k и начальными запасами x_k, $k = 1,\ldots,m$, удовлетворяющих нормировочному условию $\langle p, x_i \rangle = \alpha$. Более того, из (2) вытекает, что $\det(d\pi|_{\partial_\Omega W}) = \det J = \det\left(\partial E^j / \partial p^t - x_i^t \partial g_i^j / \partial p^t\right)$, и, опираясь на (Зак, 1981, предложение 1.8), имеем, что якобиан $\det(d\pi|_{\partial_\Omega W})$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда соответствующая экономика чистого обмена регулярна.

Предположим теперь, что распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето для функций спроса g_k. Известно (см. например, (Balasko, 1975)), что соответствующая экономика чистого обмена регулярна и для нее существует единственный равновесный вектор цен p, удовлетворяющий условию $\langle p, x_i \rangle = \alpha$. Поэтому $\operatorname{card}(\pi^{-1}(\omega) \cap \partial_\Omega W) = 1$ и отображение $\pi|_{\partial_\Omega W}$ гладко обратимо в окрестности ω. Поскольку, в силу леммы 3, отображение $\pi|_{\partial_\Omega W} : \partial_\Omega W \to \Omega \setminus \{\alpha = 0\}$ собственно, из элементарной дифференциальной топологии вытекает, что $\deg(\pi|_{\partial_\Omega W}) = \pm 1$ (см. например, (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, п. 5)), откуда и следуют утверждения предложения. ■

Теорема 1. $\pi(W) = \Omega$, *т.е. для всякой экономики* $\omega \in \Omega$ *существует равновесный вектор цен. При этом для почти всех экономик* $\omega \in \Omega$ *множество состояний равновесия (или равновесных цен)* $\pi^{-1}(\omega)$ *диффеоморфно объединению нечетного числа лучей (замкнутых при* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (0, \ldots, 0)$ *и открытых при* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ *) и конечного числа дуг окружностей.*

Доказательство. Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, то ω – экономика чистого обмена и множество равновесных цен имеет вид $\cup \mathbb{R}_+ \times p$, где объединение берется по непустому множеству нормированных равновесных векторов цен, которое для почти всех $\omega \in \Omega \cap \{\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0\}$ состоит из конечного (нечетного) числа элементов.

Предположим, что $\alpha_k \neq 0$ для некоторого k, $1 \le k \le m$. Из леммы Сарда (Хирш, 1979, гл. 3, § 1) следует, что для почти всех экономик $\omega \in \Omega \setminus \{\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0\}$ прообраз $\pi^{-1}(\omega)$ – одномерное многообразие, край которого содержится в $\partial_\Omega W$. Из предложения 1 вытекает, что для почти всех ω число точек края этого одномерного многообразия нечетно. Теорема 1 следует теперь из классификации одномерных многообразий (Милнор, 1972). ■

Рассмотрим отображение

$$F : W \to \left(\overline{\mathbb{R}}^l_+\right)^{m+1},$$

$$F(\omega, p) = (f_0(p, \alpha), f_1(p, \langle p, x_1 \rangle - \alpha_1), \ldots, f_m(p, \langle p, x_m \rangle - \alpha_m).$$

Нетрудно убедиться, что $F(W \setminus (\partial_\Omega W \cup \{\alpha = 0\})) \subseteq$ **Pars**, где **Pars** – множество Парето-оптимальных распределений продуктов между $m+1$ участником с функциями полезности $u_0, \ldots, u_m$:

$$\mathbf{Pars} = \Big\{(y_0, \ldots, y_m), \quad y_r > 0 \mid \nexists (y'_0, \ldots, y'_m), \quad y'_r > 0, \quad u_r(y'_r) \ge u_r(y_r),$$
$$r = 0, \ldots, m, \quad \sum_{r=0}^m y'_r = \sum_{r=0}^m y_r, \quad \sum_{r=0}^m u_r(y'_r) > \sum_{r=0}^m u_r(y_r)\Big\}.$$

Предложение 2. $F(W \setminus \partial_\Omega W) = \mathbf{Pars} \bigcup 0 \times \mathbf{Par}$, *где*

$$\mathbf{Par} = \Big\{(y_1, \ldots, y_m), y_k > 0 \,\Big|\, \nexists (y'_1, \ldots, y'_m), \quad y'_k > 0, \quad u_k(y'_k) \ge u_k(y_k),$$
$$k = 1, \ldots, m, \quad \sum_{k=1}^m y'_k = \sum_{k=1}^m y_k, \quad \sum_{k=1}^m u_k(y'_k) > \sum_{k=1}^m u_k(y_k)\Big\}.$$

Доказательство. Пусть $(y_0, \ldots, y_m) \in \mathbf{Pars}$, $1 \le i \le m$, $p = \left(\partial u_i / \partial y_i^1, \ldots, \partial u_i / \partial y_i^l\right) > 0$, $w_k = \langle p, y_k \rangle > 0$, $0 \le k \le m$, $\alpha = w_0 = \langle p, y_0 \rangle = \sum_{k=1}^m \alpha_k$ – разбиение α такое, что при $\alpha > 0$ все $\alpha_k > 0$, а при $\alpha = 0$ α_i – столь малое отрицательное число, что

$f_i(p,w_i)+\alpha_i f_0(p,1)>0$ (такое α_i существует, так как в этом случае $i>0$, $w_i>0$ и $f_i(p,w_i)=y_i>0$), $\alpha_k>0$, $k\neq i$, $\sum_{k\neq i}\alpha_k=-\alpha_i$. Как известно, $f_r(p,w_r)=y_r$, $r=0,\ldots,m$. Положим $\omega=(x_1,\ldots,x_m;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, где

$$x_k=\begin{cases} f_k(p,w_k)+\dfrac{\alpha_k}{\alpha}f_0(p,\alpha) & \textit{при}\quad \alpha=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k>0;\\ f_k(p,w_k)+\alpha_k f_0(p,1) & \textit{при}\quad \alpha=0;\end{cases}\qquad k=1,\ldots,m.$$

Из определения α_k вытекает, что $x_k>0$, $k=1,\ldots,m$, так что $\omega\in\Omega$. В силу закона Вальраса, $w_k(\omega,p)=\langle p,x_k\rangle-\alpha_k=w_k$, и из определения x_k следует, что $f(p,\omega)=f_0(p,\alpha)+\sum_{k=1}^{m}f_k(p,w_k)=x=y$, так что p – равновесный вектор цен в экономике ω и $\{y_r\}=F(\omega,p)$. ■

Предложение 2 показывает, что каждое Парето-оптимальное распределение реализуется как состояние равновесия в некоторой экономике $\omega\in\Omega$ (при этом одно и то же распределение является равновесным для многих экономик). Более интересным представляется следующий вопрос, в какой мере финансовые рычаги управления (в данной модели налоги) позволяют государству при фиксированных начальных запасах участников добиться желательного для него оптимального распределения ресурсов. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. *Фиксируем распределение начальных запасов* $\{x_k\}$, $x_k\geq 0$, $k=1,\ldots,m$, $x=\sum_{k=1}^{m}x_k>0$ *и суммарные налоговые поступления* $\alpha>0$. *Тогда, перераспределяя налоговое бремя между участниками и рассматривая всевозможные состояния равновесия, можно получить произвольные Парето-оптимальные распределения ресурсов x между* $m+1$ *экономическими агентами с функциями полезности* u_r, $r=0,\ldots,m$. *Точнее говоря, пусть*

$$W^{\alpha}_{\{x_k\}}=\pi^{-1}\Big(\Big\{\omega\,\Big|\,x_k(\omega)=x_k,\ k=1,\ldots,m,\ \ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k(\omega)=\alpha\Big\}\Big)\setminus\partial_\Omega W,$$

$$F^{\alpha}_{\{x_k\}}=F\,\Big|_{W^{\alpha}_{\{x_k\}}}:W^{\alpha}_{\{x_k\}}\to\mathbf{Pars}_x,$$

где $\mathbf{Pars}_x=\Big\{(y_0,\ldots,y_m)\in\mathbf{Pars}\,\Big|\,\sum_{r=0}^{m}y_r=x\Big\}$. Тогда $F^{\alpha}_{\{x_k\}}$ – диффеоморфизм (и, в частности, $F^{\alpha}_{\{x_k\}}(W^{\alpha}_{\{x_k\}})=\mathbf{Pars}_x$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $B^{\alpha}_x\subset\mathbb{R}^l_+\times(\mathbb{R}_+)^{m+1}$ множество бюджетных распределений, соответствующих ресурсам x:

$$B^{\alpha}_x=\Big\{(p;w_0,\ldots,w_m)\,\Big|\,p>0,\ w_0=\alpha,\ w_k>0,\ k=1,\ldots,m,\ \sum_{r=0}^{m}f_r(p,w_r)=x\Big\}$$

и рассмотрим отображение

$$\phi^{\alpha}_x:\mathbf{Pars}_x\to\mathbb{R}^l_+\times(\mathbb{R}_+)^{m+1},\quad \phi(y_0,\ldots,y_m)=(p;w_0,\ldots,w_m),$$

$$p=\alpha\left(\frac{\partial u_0}{\partial y_0^1},\ldots,\frac{\partial u_0}{\partial y_0^l}\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial u_0}{\partial y_0^j}y_0^j\right),\quad w_r=\langle p,y_r\rangle,\quad r=0,\ldots,m.$$

Известно (см. например, (Balasko, 1979, Appendix)), что $\phi_x^\alpha(\mathbf{Pars}_x) = B_x^\alpha$, причем B_x^α и $\mathbf{Pars}_x$ – гладкие многообразия, диффеоморфные $\mathbb{R}^m$, а $\phi_x^\alpha : \mathbf{Pars}_x \to B_x^\alpha$ – диффеоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} W_{\{x_k\}}^\alpha \arrow[r, "F_{\{x_k\}}^\alpha"] \arrow[dr, "\psi_{\{x_k\}}^\alpha"'] & \mathbf{Pars}_x \arrow[d, "\phi_x^\alpha"] \\ & B_x^\alpha \end{tikzcd},$$

где

$$\psi_{\{x_k\}}^\alpha(x_1,\ldots,x_m;\alpha_1,\ldots,\alpha_m;p^1,\ldots,p^l) = (p^1,\ldots,p^l;\alpha,\langle p,x_1\rangle-\alpha_1,\ldots,\langle p,x_m\rangle-\alpha_m).$$

Мы уже отметили, что ϕ_x^α – диффеоморфизм. Утверждение теоремы следует теперь из того, что $\psi_{\{x_k\}}^\alpha$ также является диффеоморфизмом; при этом

$$(\psi_{\{x_k\}}^\alpha)^{-1}(p^1,\ldots,p^l;\alpha,w_1,\ldots,w_m) = (x_1,\ldots,x_m;p^1,\ldots,p^l;\langle p,x_1\rangle-w_1,\ldots,\langle p,x_m\rangle-w_m). \blacksquare$$

При $\alpha = 0$, т.е. в случае, когда налоговая политика государства сводится к перераспределению доходов, имеет место следующий аналог теоремы 2.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2, варьируя налоги (выплаты)* α_k *так, что* $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 0,$ *и рассматривая всевозможные состояния равновесия, можно получить произвольные Парето-оптимальные распределения ресурсов x между m экономическими агентами с функциями полезности* u_k , $k = 1,\ldots,m.$ *Точнее говоря, пусть*

$$\mathbf{Par}_x = \{(y_1,\ldots,y_m) \in \mathbf{Par} \mid \sum_{k=1}^m y_k = x\}.$$

Тогда, в обозначениях теоремы 2, $F_{\{x_k\}}^0(W_{\{x_k\}}^0) = \mathbf{Par}_x$, причем для всякого $P > 0$ ограничение

$$F_{\{x_k\}}^0\Big|_{W_{\{x_k\}}^0 \cap \left\{\sum_{j=1}^l p^j = P\right\}} : W_{\{x_k\}}^0 \bigcap \left\{\sum_{j=1}^l p^j = P\right\} \to \mathbf{Par}_x$$

является диффеоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 2, причем нормировочное условие $w_0 = \alpha$ заменяется нормировочным условием $\sum_{j=1}^l p^j = P.$ $\blacksquare$

Объединяя теоремы 2 и 3, получаем следствие.

Следствие. *Фиксируем распределение начальных запасов* $\{x_k\}$, $x_k \geq 0$, $x = \sum_{k=1}^m x_k > 0.$ *Варьируя сумму налоговых сборов* $\alpha \geq 0,$ *перераспределяя налоговое бремя между участниками и рассматривая всевозможные состояния равновесия, можно получить произвольные распределения из* **Pars**. *Точнее говоря, пусть*

$$\overline{W}_{\{x_k\}} = \pi^{-1}(\{\omega \mid x_k(\omega) = x_k, \quad k = 1,\ldots,m, \quad \alpha = \sum_{k=0}^m \alpha_k(\omega) \geq 0\}).$$

$$\text{Тогда } \overline{F}_{\{x_k\}} = \overline{F}\,|_{\overline{W}_{\{x_k\}}} : \overline{W}_{\{x_k\}} \to \widetilde{\mathbf{Pars}}_x \ \text{ – расслоение со слоем } \mathbb{R}_+ \text{ над}$$

$$\widetilde{\mathbf{Pars}}_x = \{(y_0, \dots, y_m) \in \overline{\mathbf{Pars}}_x \mid \{y_k\} \in \mathbf{Par}_x^I, \quad k \notin I\},$$

где

$$\mathbf{Par}_x^I = \{z_k\},\ z_k > 0,\ k \in \{0, \dots, m\} \setminus I \ \Big| \ \nexists \{z_{k'}\},\ z_k' > 0,$$
$$\sum_k z_k' = \sum_k z_k = \sum_k y_k = x, \quad u_k(z_k') \ge u_k(z_k), \quad \sum_k u_k(z_k') > \sum_k u_k(z_k).$$

Доказательство. Следствие немедленно вытекает из теорем 2 и 3 и того факта, что функции спроса однородны степени ноль. ■

Казалось бы, результаты теорем 2 и 3 и их следствия должны удовлетворить государство: подходящее налогообложение позволяет добиться желательного для государства распределения продуктов. Однако в нашей модели государство осуществляет лишь налоговое регулирование и лишено возможности воздействовать на выбор равновесных цен. Согласно теореме 1, для экономики общего положения ω равновесные цены образуют одномерное многообразие, и важнейшее значение приобретает процесс ценообразования, в котором цели различных экономических агентов и государства вступают в противоречие друг с другом. При этом, если держатели продуктов договорятся между собой о выборе равновесных цен, то государству не останется ничего иного, как осуществлять закупки по этим ценам.

В экономике ω разным участникам выгодны разные элементы множества равновесных цен. Чтобы подробнее разобраться в этом, рассмотрим непрямые функции полезности v_r на W: $v_0(\omega, p) = u_0(f_0(p, \alpha))$, $v_k(\omega, p) = u_k(f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k))$, где $x_k = x_k(\omega)$, $\alpha_r = \alpha_r(\omega)$, $k = 1, \dots, m$, $r = 0, \dots, m$, $\alpha = \alpha_0$. Нас интересует поведение функций v_r вдоль слоев отображения ϖ. Фиксируем $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, x_k, $k \ne i$, и положим

$$\Omega_i = \{\omega \in \Omega \mid \alpha_k(\omega) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad x_k(\omega) = x_k, \quad k \ne i\},$$
$$W_i = \pi^{-1}(\Omega_i), \quad \pi_i = \pi\,|_{W_i} : W_i \to \Omega_i.$$

Ядро оператора $d\pi$ определяется ядром оператора $d\pi_i$. При доказательстве предложения 1 было показано, что функции p^j, $j = 1, \dots, l$ и w_i образуют систему координат на W_i, причем матрица Якоби π_i имеет вид

$$d\pi_i = S^{l \times (l+1)}, \quad S_{jt} = \frac{\partial f_0^j}{\partial p^t} + \frac{\partial f_i^j}{\partial p^t} + \sum_{k \ne i} \frac{D f_k^j}{D p^t}, \quad j, t = 1, \dots, l,$$
$$\frac{D f_k^j}{D p^t} = \frac{\partial f_k^j}{\partial p^t} + \frac{\partial f_k^j}{\partial w_k} x_k^t, \quad k \ne i, \quad S_{j, l+1} = \frac{\partial f_i^j}{\partial w_i}. \tag{3}$$

Другими словами,

$$S = \left(\left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)^{l \times l} - \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_i} \right)^{l \times 1} x_i^{1 \times l},\ \frac{\partial f_i}{\partial w_i} \right),$$

где $E(p, \omega) = f_0(p, \alpha) + \sum_{k=1}^{m} f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) - x$ – функция совокупного избыточного спроса.

Поскольку $\operatorname{grad} u_r = \lambda_r p, \quad r = 0,\dots,m,$ где λ_r – положительный скаляр, на W_i имеем:

$$dv_0 = \lambda_0 \sum_{j=1}^{l} \left\langle p, \frac{\partial f_0}{\partial p^j}(p,\alpha) \right\rangle dp^j,$$

$$dv_i = \lambda_i \sum_{j=1}^{l} \left\langle p, \frac{\partial f_i}{\partial p^j}(p,w_i) \right\rangle dp^j + \lambda_i \left\langle p, \frac{\partial f_i}{\partial w_i}(p,w_i) \right\rangle dw_i,$$

$$dv_k = \lambda_k \sum_{j=1}^{l} \left\langle p, \frac{\partial f_k}{\partial p^j}(p,\langle p,x_k\rangle - \alpha_k) \right\rangle dp^j +$$

$$+\lambda_k \sum_{j=1}^{l} \left\langle p, \frac{\partial f_k}{\partial w_k}(p,\langle p,x_k\rangle - \alpha_k) \right\rangle x_k^j dp^j, \quad 1 \le k \le m, \quad k \ne i.$$

Согласно формуле агрегации Курно, $\left\langle p, \frac{\partial f_r}{\partial p} \right\rangle + f_r = 0, \;\; r = 0,\dots,m,$ а по формуле агрегации Энгеля $\left\langle p, \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \right\rangle = 1, \;\; k = 1,\dots,m.$ Подставляя эти значения в приведенные выше формулы, получаем:

$$dv_0 = -\lambda_0 \sum_{j=1}^{l} f_0^j dp^j,$$

$$dv_i = -\lambda_i \sum_{j=1}^{l} f_i^j dp^j + \lambda_i dw_i, \tag{4}$$

$$dv_k = -\lambda_k \sum_{j=1}^{l} E_k^j dp^j, \quad 1 \le k \le m, \quad k \ne i,$$

где $E_k(\omega, p) = f_k(p,\langle p,x_k\rangle - \alpha_k) - x_k$ – функция избыточного спроса экономического агента k.

Лемма 4. $\operatorname{rk} S = \operatorname{rk}\frac{\partial E}{\partial p} + 1,$ *где, как обычно,* rk *обозначает ранг матрицы. При этом ядра матриц* S *и* $\frac{\partial E}{\partial p}$ *естественно изоморфны друг другу.*

Доказательство. В системе координат $(dp^1,\dots,dp^l; dw_i)$ выберем вектор $e^{(l+1)\times 1} = (e',\varepsilon)$, где e' – вектор из подпространства, натянутого на $\frac{\partial}{\partial p^1},\dots,\frac{\partial}{\partial p^l}$, а ε – скаляр (так что $e = e' + \varepsilon \frac{\partial}{\partial w_i}$). Тогда

$$Se = \frac{\partial E}{\partial p} e' + (\varepsilon - \langle x_i, e'\rangle) \frac{\partial f_i}{\partial w_i},$$

так что, варьируя e' и полагая $\varepsilon = \langle x_i, e'\rangle$, мы видим, что $\operatorname{Im} S \supset \operatorname{Im}\frac{\partial E}{\partial p}.$ Из условия агрегации Курно следует, что в состоянии равновесия $p\frac{\partial E}{\partial p} = E(p) = 0.$ Таким образом, $pSe = \varepsilon - \langle x_i, e'\rangle$ в то время как $p\frac{\partial E}{\partial p}e' = 0.$ Поэтому $\operatorname{Im}\frac{\partial E}{\partial p} \subsetneq \operatorname{Im} S \subset \left\langle \operatorname{Im}\frac{\partial E}{\partial p}, \frac{\partial f_i}{\partial w_i} \right\rangle$ и, следовательно,

$$\operatorname{rk} S = \dim \operatorname{Im} S = \dim \operatorname{Im}\frac{\partial E}{\partial p} + 1 = \operatorname{rk}\frac{\partial E}{\partial p} + 1.$$

Пусть $e' \in \operatorname{Ker}\frac{\partial E}{\partial p}$, где, как обычно, Ker обозначает ядро оператора. Тогда $S(e',\varepsilon) = (\varepsilon - \langle x_i, e'\rangle)\frac{\partial f_i}{\partial w_i}$ и при $\varepsilon = \langle x_i, e'\rangle$ получаем $(e',\varepsilon) \in \operatorname{Ker} S.$ Но, как только что было доказано,

$$(l+1) - \dim\operatorname{Ker} S = \dim\operatorname{Im} S = \dim\operatorname{Im}\frac{\partial E}{\partial p} + 1 = l - \dim\operatorname{Ker}\frac{\partial E}{\partial p} + 1,$$

следовательно, $\dim\operatorname{Ker} S = \dim\operatorname{Ker}\frac{\partial E}{\partial p},$ и эти ядра естественно изоморфны. ■

Как обычно, экономические соображения позволяют нам ограничиться исследованием экономик общего положения.

Определение. Экономика ω называется *регулярной*, если для всех $p \in \pi^{-1}(\omega)$ отображение $d_{(\omega,p)}\pi$ сюръективно, т.е. $\operatorname{rk} S(\omega, p) = l.$

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что почти все экономики $\omega \in \Omega$ регулярны, а состояния равновесия в регулярной экономике образуют одномерное многообразие (с краем при $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \neq (0,\ldots,0)$ и без него при $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$). Из леммы 4 следует, что для регулярной экономики ω и равновесной цены *p* в ω имеем $\operatorname{rk}(\partial E/\partial p) = l - 1$, причем если $\operatorname{Ker}(\partial E/\partial p)$ порождается вектором $e',$ то $\operatorname{Ker} d\pi$ – одномерное векторное пространство с базисом $e = (e', \langle x_i, e'\rangle)$.

Заметим,что если $\alpha_1(\omega) = ... = \alpha_m(\omega) = 0,$ то из леммы 4 и предложения 1.8 из (Зак, 1981) вытекает, что ω регулярна тогда и только тогда, когда регулярна экономика чистого обмена с *m* участниками, обладающими функциями полезности u_k и начальными запасами x_k, $k = 1,\ldots,m.$

Проведенные выше вычисления дифференциала отображения ϖ и непрямых функций полезности (см. (3) и (4)) позволяют оценить сравнительную выгодность различных состояний равновесия в регулярной экономике ω для экономических агентов и государства. Оказывается, что результат существенно зависит от свойств функции совокупного спроса. Тем не менее существуют и общие закономерности.

Теорема 4. *Пусть* $\omega \in \Omega$ *– регулярная экономика.*

А. *Если при равновесных ценах p в экономике ω некоторые из экономических агентов (или государство) заинтересованы в повышении (соответственно, снижении) цен, то найдутся также экономические агенты (или государство), заинтересованные в их снижении (соответственно, повышении).*

Б. *Предположим, что* $x_1,\ldots,x_m$, $x_k = x_k(\omega)$, $k = 1,\ldots,m$ *– регулярная экономика чистого обмена,* $\alpha = \alpha(\omega) > 0.$ *Пусть* $(\omega, p) \in \pi^{-1}(\omega)$, *причем цены p достаточно велики, т.е.* $\|p\| > C,$ *где* $C = C(\omega)$ *– подходящая константа (в этом случае мы будем сокращенно писать* $\| p \| \gg 0$ *). Тогда государство и все участники, получающие дотации и имеющие нормальный спрос (т.е. участники n, для которых* $\alpha_n < 0$ *и* $\partial f_n / \partial w_n \geq 0$ *), заинтересованы в снижении цен на все товары (в то время как из А следует, что существуют и участники, заинтересованные в их повышении).*

Доказательство.

А. Согласно лемме 4, касательный вектор к $\pi^{-1}(\omega)$ в точке (ω, p) имеет вид $e = (e', \langle x_i, e' \rangle)$. Положим $v = \sum_{r=0}^{m} (v_r / \lambda_r)$. Из наших вычислений следует, что

$$\langle dv, e \rangle = \sum_{r=0}^{m} \frac{\langle dv_r, e \rangle}{\lambda_r} = -\langle f_0, e' \rangle - \langle f_i, e' \rangle + \langle x_i, e' \rangle - \sum_{k \neq 0, i} \langle E_k, e' \rangle = -\langle E(\omega, p), e' \rangle = 0.$$

Поэтому если $\langle dv_r, e \rangle > 0$ (соответственно, $\langle dv_r, e \rangle < 0$), то существует $r',\ 0 \le r' \le m,$ для которого $\langle dv_{r'}, e \rangle < 0$ (соответственно, $\langle dv_{r'}, e \rangle > 0$).

Б. Как и при доказательстве утверждения А, мы видим, что $\langle dv_0, e \rangle = -\lambda_0 \langle f_0, e' \rangle$, $\langle dv_k, e \rangle = -\lambda_k \langle E_k, e' \rangle$, $k = 1, \ldots, m.$ Поэтому достаточно проверить, что если $p \gg 0$ (т.е. норма вектора *p* достаточно велика), $\alpha_n < 0$, $\partial f_n / \partial w_n \ge 0$, то $\langle f_0, e' \rangle > 0$, $\langle E_n, e' \rangle > 0.$ Имеем

$$\mathbb{R}e' = \mathrm{Ker} \frac{\partial E}{\partial p}(\omega, p) = \mathrm{Ker}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p}\left(\frac{p}{\| p \|}, \frac{\alpha}{\| p \|} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial p}\left(\frac{p}{\| p \|}, \left\langle \frac{p}{\| p \|}, x_k \right\rangle - \frac{\alpha_k}{\| p \|} \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial w_k}\left(\frac{p}{\| p \|}, \left\langle \frac{p}{\| p \|}, x_k \right\rangle - \frac{\alpha_k}{\| p \|} \right) x_k \right).$$

Ясно, что когда *p* стремится к бесконечности вдоль одного из лучей равновесных цен в ω, $p / \| p \|$ стремится к одному из равновесных векторов цен в экономике чистого обмена с начальными запасами $x_1, \ldots, x_m$. Из условия теоремы 4Б следует, что ранг матрицы $\partial E / \partial p$ в этой экономике чистого обмена равен $l - 1,$ а формула Эйлера показывает, что ядро матрицы $\partial E / \partial p$ в соответствующей точке порождено равновесным вектором цен. Поэтому при $\| p \| \gg 0$ ядро матрицы $\partial E / \partial p$ в состоянии равновесия (ω, p) порождено *положительным* вектором e' (так что при $\| p \| \gg 0$ цены на все продукты возрастают вдоль всех лучей равновесных цен в ω). Поскольку при наших условиях $f_0(p, \alpha) > 0$ и $E_n(\omega, p) > 0,$ отсюда вытекает, что $\langle f_0, e' \rangle > 0$ и $\langle E_n, e' \rangle > 0$. ■

Теорема 4 показывает, что для экономик общего положения интересы участников, проявляющиеся в оценке различных состояний равновесия, вступают в противоречие друг с другом, причем если цены достаточно велики, то, как и подсказывает здравый смысл, государству, получающему фиксированный доход, невыгодна инфляция. При малых ценах это уже не так, и хотелось бы выделить функции спроса, для которых это свойство сохраняется при всех равновесных ценах. В классической теории экономического равновесия хорошо известен класс *экономик с валовой заменимостью*, равновесные (нормированные) векторы цен в которых единственны, устойчивы по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования и обладают рядом других важных свойств. Представляет интерес исследовать свойства состояний равновесия в нашей модели в этом наиболее благоприятном случае. В гладком случае удобно использовать следующий вариант определения валовой заменимости.

Определение. Функция совокупного спроса $f(p;w_0,\ldots,w_m)=$ $=\sum_{r=0}^{m} f_r(p,w_r)$ обладает свойством *валовой заменимости* (соответственно, *сильной валовой заменимости*), если $\partial f^j/\partial p^t \geq 0$ (соответственно, $\partial f^j/\partial p^t > 0$) для всех $j\neq t,\ 1\leq j,t\leq l$.

Теорема 5. *Предположим, что все экономические агенты имеют нормальный спрос (т.е. $\partial f_k/\partial w_k \geq 0,\ k=0,\ldots,m$), совокупный спрос удовлетворяет условию валовой заменимости и выполнено одно из следующих условий:*

1) $x_i = x_i(\omega) > 0$ для некоторого i, $1\leq i\leq m$;

2) спрос всех экономических агентов строго нормален (т.е. $\partial f_k/\partial w_k > 0$, $k=1,\ldots,m$);

3) совокупный спрос удовлетворяет условию сильной валовой заменимости.

Тогда справедливы следующие утверждения.

А. *Экономика* ω *регулярна.*

Б. *Множество состояний равновесия в экономике* ω *диффеоморфно лучу, вдоль которого цены на все продукты монотонно возрастают и стремятся к бесконечности.*

Доказательство.

А. Очевидно, что отображение $d\pi$ сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективно отображение $d\pi_i = \left(S_i, \dfrac{\partial f_i}{\partial w_i}\right)$, где $S_i = \dfrac{\partial E}{\partial p} - \dfrac{\partial f_i}{\partial w_i}x_i$. Поэтому нам достаточно доказать, что матрица S_i невырождена. Из условия теоремы следует, что при $j\neq t$ имеем $(-S_i)_{jt} = -\dfrac{\partial f^j}{\partial p^t} - \sum_{k\neq i} x_k^t \dfrac{\partial f_k^j}{\partial w_k} \leq 0$. Согласно закону Вальраса, $p\dfrac{\partial E}{\partial p}=0$, так что $p(-S_i) = \left\langle p, \dfrac{\partial f_i}{\partial w_i}\right\rangle x_i = x_i$. Поэтому в случае 1) матрица $-S_i$ имеет доминирующую диагональ (Никайдо, 1972, гл. II, § 21.1) и, следовательно, удовлетворяет условию Хокинса–Саймона (Никайдо, 1972, гл. II, § 6.2). В частности, $-S_i$ неотрицательно обратима и $\det(-S_i)>0$, откуда и следует утверждение А.

Если выполнено условие 2), то, поскольку $x=\sum_{k=1}^{m} x_k > 0$, из теоремы Перрона–Фробениуса вытекает, что при $\lambda \gg 0$ матрица $\lambda \mathrm{Id} + \partial E/\partial p$ имеет собственный вектор $e' > 0$, соответствующий максимальному собственному значению $\mu > 0$. Имеем

$$\frac{\partial E}{\partial p}e' = (\mu-\lambda)e',\quad 0=\left(p\frac{\partial E}{\partial p}\right)e' = p\left(\frac{\partial E}{\partial p}e'\right) = (\mu-\lambda)\langle p,e'\rangle,$$

так что $\lambda=\mu$ и e' порождает $\mathrm{Ker}\dfrac{\partial E}{\partial p}$. Пусть $\lambda\gg 0$, $T_i = \lambda\mathrm{Id} + S_i \geq 0$, $e_i \geq 0$ – собственный вектор T_i, соответствующий максимальному собственному значению $\mu_i \geq 0$. Тогда

$$S_i e_i = (\mu-\lambda)e_i,\quad -\langle x_i, e_i\rangle = (pS_i)e_i = p(S_i e_i) = (\mu_i-\lambda)\langle p,e_i\rangle.$$

Поскольку $\langle p,e_i\rangle > 0$, а $-\langle x_i,e_i\rangle \leq 0$, отсюда следует, что $\mu_i\leq\lambda$. Если $\mu_i<\lambda$, то из теоремы Перрона–Фробениуса вытекает, что матрица $-S_i$ неотрицательно обратима, так что $\det(-S_i) > 0$ и утверждение А доказано. Если же $\mu_i = \lambda$, то $S_i e_i = 0$, так что $\langle x_i, e_i \rangle = -p(S_i e) = 0$ и $\frac{\partial E}{\partial p} e_i = \langle x_i, e_i \rangle \frac{\partial f_i}{\partial w_i} = 0$, т.е. $e_i \in \operatorname{Ker} \frac{\partial E}{\partial p}$. Но, как было только что показано, $\operatorname{Ker} \frac{\partial E}{\partial p} = \mathbb{R}e'$, где $e' > 0$, и, следовательно, скалярное произведение $\langle x_i, e_i \rangle$ положительно. Полученное противоречие доказывает утверждение А в случае 2).

Наконец, если выполнено условие 3), то из теоремы Перрона–Фробениуса непосредственно вытекает, что, в обозначениях предыдущего раздела, $e_i > 0$, так что $\langle x_i, e_i \rangle > 0$, $\lambda > \mu_i$, матрица $-S_i$ неотрицательно обратима и $\det(-S_i) > 0$. Утверждение А полностью доказано.

Б. Рассмотрим отображение $w_i : \pi^{-1}(\omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Ясно, что w_i собственно. Из утверждения А теоремы следует, что $\pi^{-1}(\omega)$ – одномерное многообразие с краем, а из леммы 4 – что касательный вектор к $\pi^{-1}(\omega)$ в точке (ω, p) в системе координат $dp^1, \ldots, dp^l; dw_i$ имеет вид $e = (e', \langle x_i, e' \rangle)$, где вектор e' порождает одномерное векторное пространство $\operatorname{Ker} \frac{\partial E}{\partial p}$. Как уже было отмечено при доказательстве утверждения А, из теоремы Перрона–Фробениуса следует, что без ущерба для общности можно считать, что $e' \geq 0$, причем в случаях 2) и 3) $e' > 0$. Таким образом, во всех случаях 1)–3) имеем $\langle x_i, e' \rangle > 0$, так что $\partial w_i / \partial e > 0$ и w_i является локальной координатой всюду в $\pi^{-1}(\omega)$. Поэтому число элементов в слоях отображения $w_i : \pi^{-1}(\omega) \to w_i(\pi^{-1}(\omega)) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ постоянно, и $\pi^{-1}(\omega)$ является объединением нечетного числа лучей (дуги отсутствуют).

Из леммы 2 и неотрицательности вектора e' вытекает, что вдоль этих лучей цены на все продукты монотонно возрастают и стремятся к бесконечности. Наконец, при доказательстве утверждения А было показано, что $\det(-S_i) > 0$. Отсюда и из вычисления якобиана в доказательстве предложения 1 вытекает знакоопределенность $\det(d\pi|_{\partial_\Omega W})$ в случае, если $\alpha_k \neq 0$ для некоторого k, $1 \leq k \leq m$, а поскольку при доказательстве предложения 1 мы установили, что $\deg \pi|_{\partial_\Omega W} = \pm 1$, в этом случае край многообразия $\pi^{-1}(\omega)$ состоит из одной точки, что и доказывает утверждение Б. Если же $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, то совершенно аналогичное рассуждение с якобианом проводится для нормированных цен (см. следствие леммы 1; впрочем, в этом случае ω – экономика чистого обмена, так что единственность нормированного равновесного вектора цен хорошо известна). ■

Стандартный вальрасовский процесс ценообразования (tâtonnement) состоит в том, чтобы повышать цены на дефицитные продукты и понижать – на продукты, имеющиеся в избытке. В нашей модели этот процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dp}{dt} = E(p)$, где $E(p) = E(\omega, p) = f_0(p, \alpha) + \sum_{k=1}^{m} f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) - x$, $\alpha = \alpha(\omega)$, $\alpha_k = \alpha_k(\omega)$, $x_k = x_k(\omega)$, $k = 1, \ldots, m$ – функция совокупного избыточного спроса. Важным обстоятельством является то, что, согласно закону Вальраса, в этой модели, как и в модели чистого обмена, $\frac{d\,\|p\|^2}{dt} = 2\langle p, dp/dt\rangle = 2\langle p, E(p)\rangle = 0,$ т.е. длина вектора цен постоянна вдоль траекторий.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 равновесные цены устойчивы по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования. Точнее говоря, если* $p_0 \in \mathbb{R}^l_+$ *– начальный вектор цен и длина* p_0 *достаточно велика (т.е.* $\|p_0\| > C = C(\omega),$ *где* C *– достаточно большое число), то при* $t \to \infty$ *имеем* $p(t) \to p_0^e,$ *где* p_0^e *– единственный равновесный вектор цен в* ω*, для которого* $\|p_0^e\| = \|p_0\|.$

Доказательство. Из леммы 2 нетрудно вывести, что для достаточно больших C при движении вдоль траектории имеем $w_k = \langle p, x_k\rangle - \alpha_k > 0$ для всех $k = 1,\ldots,m.$ Матрица $\lambda Id + \partial E/\partial p$ неотрицательна при $\lambda \gg 0$ и, согласно теореме Перрона–Фробениуса, имеет собственный вектор $e' \geq 0,$ соответствующий максимальному собственному значению $\mu \geq 0.$ Имеем

$$\frac{\partial E}{\partial p} e' = (\mu - \lambda)e', \quad 0 = \left(p\frac{\partial E}{\partial p}\right)e' = p\left(\frac{\partial E}{\partial p}e'\right) = (\mu - \lambda)\langle p, e'\rangle,$$

так что $\lambda = \mu$ и $e' \in \mathrm{Ker}(\partial E/\partial p).$ Теперь из леммы 4 и теоремы 5 вытекает, что 0 – собственное значение $\partial E/\partial p$ кратности один, а вещественные части всех остальных собственных значений $\partial E/\partial p$ отрицательны. Поскольку, как мы только что показали, длина вектора *p* постоянна вдоль траекторий, а согласно утверждению Б теоремы 5 в ω существует *единственный* равновесный вектор цен заданной длины, этого достаточно для *локальной* устойчивости.

На самом деле имеет место и *глобальная* устойчивость. Доказать это можно, как и в случае модели чистого обмена, следующим образом. Пусть $\|p - p_0^e\|$ – расстояние от текущей до предполагаемой предельной точки нашей траектории. Тогда

$$\frac{d\,\|p - p_0^e\|^2}{dt} = \frac{d\,\|p\|^2}{dt} - 2\frac{d\langle p, p_0^e\rangle}{dt} = -2\langle p^e, E_0\rangle,$$

и нам, по существу, достаточно проверить, что функция $\langle p_0, E(p)\rangle$ достигает минимума на многообразии $\{\|p\| = \|p_0\|\} \cap \mathbb{R}^l_+$ в точке $p = p_0^e.$ Это делается так же, как в классической работе Эрроу и Гурвича (см. например, (Никайдо, 1972, гл. IV, § 18.3)). ■

Теорема 7. *В условиях теоремы 5 предположим дополнительно, что* $\alpha > 0.$ *Тогда полезность государства, а также всех экономических агентов, получающих дотацию, монотонно убывает вдоль (единственного) луча равновесных цен и достигает максимума в (единственном) состоянии равновесия* $\pi^{-1}(\omega) \cap \partial_\Omega W,$ *в котором цены на все продукты минимальны.*

Доказательство. Из леммы 4 следует, что касательный вектор к $\pi^{-1}(\omega)$ в точке (ω, p) в системе координат $dp^1,\ldots,dp^l; dw_i$ имеет вид $e = (e', \langle x_i, e'\rangle),$ где $\mathbb{R}e' = \mathrm{Ker}(\partial E/\partial p).$ Из вычисления дифференциалов непрямых функций полезности следует, что $\partial v_0 / \partial e = -\lambda_0 \langle f_0(p,\alpha), e' \rangle$, $\partial v_k / \partial e = -\lambda_k \langle E_k(\omega, p), e' \rangle$, $k = 1,\ldots,m$. Как уже было отмечено при доказательстве теоремы 5, $e' \geq 0$ (и даже $e' > 0$ в случаях 2) и 3)). Поскольку при $\alpha > 0$ имеем $f_0(p,\alpha) > 0$, а при $\alpha_n < 0$ выполнено неравенство $E_n > 0$, отсюда следует, что при наших предположениях $\partial v_0 / \partial e < 0$, $\partial v_n / \partial e < 0$ в каждой точке $\pi^{-1}(\omega)$. Это доказывает утверждение теоремы (заметим, что при $\alpha = 0$ государство индифферентно по отношению к выбору состояния равновесия). ■

Замечание. Из теоремы 4А следует, что среди агентов, уплачивающих налоги (т.е. для *n* агентов, для которых $\alpha_n \geq 0$), обязательно имеются как заинтересованные в повышении цен, так и заинтересованные в их снижении. Таким образом, в обществе всегда возникает конфликт интересов между государством, желающим предотвратить инфляцию, и некоторыми налогоплательщиками, которым выгодно повышение цен. Компромисс, позволяющий разрешить этот конфликт, заключается в максимизации *общественной функции полезности*, являющейся выпуклой комбинацией индивидуальных функций полезности экономических агентов и государства с весами, отражающими их общественную значимость.

Следует однако отметить, что целесообразность такого подхода ограничивается как тем, что при недостаточном весе государства и получателей дотаций цены могут уходить на бесконечность, так и отсутствием адекватного процесса ценообразования. Точнее говоря, если вес государства низок, то цены могут стремиться к бесконечности (при этом соответствующий нормированный вектор цен стремится к равновесному вектору цен в экономике чистого обмена с начальными запасами x_k), а если он очень высок, то общественная полезность достигает максимума, когда цены на все продукты минимальны. При этом трудно построить разумный процесс ценообразования, сходящийся к равновесию, оптимальному с точки зрения общественной полезности.

2. Налоговое регулирование при фиксированном государственном потреблении

Вторая модель налогообложения отличается от первой тем, что государство заранее фиксирует ресурсы y, необходимые для его функционирования, а изъятые в виде налогов деньги полностью идут на закупку этих ресурсов. В этом случае цель налогообложения – стерилизация избыточной денежной массы и уменьшение покупательной способности экономических агентов до такого уровня, чтобы по завершении обмена между участниками часть продуктов в количестве y осталась невостребованной и отошла государству.

Итак, в модели имеется l продуктов и m экономических агентов, причем агент k располагает начальным запасом продуктов $x_k \geq 0$. Государство распределяет между участниками налоговое бремя α, причем участник k облагается налогом α_k, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \alpha$. Заметим, что, как и в первой модели, мы допускаем, что $\alpha_k < 0$, т.е. государство может оказывать финансовую помощь некоторым агентам. Более того, мы не исключаем *a priori* и случая $\alpha < 0$. Из общих товарных запасов $x = \sum_{k=1}^{m} x_k$ государство изымает необходимый для его функционирования вектор $y \leqq x$, а оставшиеся продукты продаются на рынке по ценам p. Мы не исключаем также случай, когда $y^j \le 0$ для некоторых j, $1 \le j \le l$, т.е. государство выбрасывает на рынок некоторые ресурсы (при необходимости одновременно выделяя средства на их приобретение). Как и в первой модели, участник k имеет функцию спроса $f_k(p, w_k)$, порожденную строго вогнутой трижды непрерывно дифференцируемой функцией полезности u_k, где $w_k = \langle p, x_k \rangle - \alpha_k$, $k = 1, \dots, m$, причем $f_k : \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^l$, $f_k(\mathbb{R}_+^l \times 0) = 0$, а функция совокупного спроса $f(p; w_1, \dots, w_m) = \sum_{k=1}^{m} f_k(p, w_k)$ удовлетворяет условию (DES).

Ясно, что равновесные цены во второй модели описываются системой l уравнений $\sum_{k=1}^{m} f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) = x - y$, где $x = \sum_{k=1}^{m} x_k > 0$, p – положительный вектор, $\langle p, x_k \rangle - \alpha_k \ge 0$, $k = 1, \dots, m$. Из закона Вальраса вытекает, что в состоянии равновесия $\langle p, y \rangle = \alpha$. Отсюда, в частности, следует, что в этой модели не всегда существует состояние равновесия. Например, если $\alpha = 0$, $y \geq 0$, то равновесия не существует. Если $y^j = x^j$ для некоторого j, $1 \le j \le l$, то из свойств функций спроса вытекает, что $\alpha_k = \langle p, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$, а $y = x$. Но в последнем случае любой вектор цен p является равновесным. С другой стороны, равновесие в экономике *общего положения* не может существовать, если число участников достаточно велико. Этот случай не представляет особого интереса, и в дальнейшем мы будем предполагать, что $y < x$.

Замечание. Вырожденный случай нашей второй модели налогообложения, когда $y = 0$, был рассмотрен в статье (Balasko, Shell, 1985). Распределение налогов $\{\alpha_k\}$, для которого существует равновесный вектор цен, называется *добросовестным* (bona fide). Из закона Вальраса следует, что необходимым условием добросовестности является $\alpha = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 0$. В (Balasko, Shell, 1985) показано, что при $y = 0$ и заданных начальных запасах $\{x_k\}$ для открытого плотного подмножества добросовестных распределений $\{\alpha_k\}$ существует лишь конечное число равновесных векторов цен, однако в отличие от модели чистого обмена это число не обязано быть нечетным; в частности, в предположениях статьи (Balasko, Shell, 1985) в модели может не быть равновесия. В (Balasko, Shell, 1993) исследуются взаимоотношения между Парето-оптимальными распределениями и состояниями равновесия все в том же вырожденном случае $y = 0$. Ниже мы увидим, что, при некоторых естественных условиях на налогообложение и государственное потребление, в рассматриваемой модели всегда существует равновесие (теорема 8) и что, варьируя налогообложение, государство может добиться произвольного Парето-оптимального распределения ресурсов x–y между m участниками (теорема 9).

Удобно считать, что экономика задается точкой

$$\omega \in \Omega = \{(x_1,\dots,x_m; y; \alpha_1,\dots,\alpha_m) \mid x_k^j \geq 0, \quad x^j = \sum_{k=1}^m x_k^j > 0,\ y < x\} \subset \mathbb{R}^{lm+l+m}.$$

Изучение состояний равновесия естественно интерпретируется как исследование многообразия (с краем)

$$W = \{(\omega, p) \subset \Omega \times \mathbb{R}_+^l \,\big|\, \langle p, x_k \rangle \geq \alpha_k, \quad k = 1,\dots,m; \quad \sum_{k=1}^m f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) = x - y\}.$$

Как и в первой модели, будем называть *W соответствием Вальраса* и обозначать через $\pi : W \to \Omega$ ограничение на W отображения проектирования $\Omega \times \mathbb{R}_+^l$ на первый сомножитель. При этом точки слоя $\pi^{-1}(\omega)$ взаимно однозначно соответствуют равновесным ценам в экономике ω.

Лемма 5. *Пусть* $\omega \in \Omega$ *– экономика, для которой* $\alpha_k(\omega) \neq 0$ *при некотором k,* $1 \leq k \leq m$. *Тогда в некоторой окрестности U точки* ω *в* Ω *равновесные цены отделены от нуля, т.е. существует константа* $C > 0$ *такая, что при* $\omega' \in U$ *для всякого равновесного вектора цен p в* ω' *имеют место неравенства* $p^j > C, \quad j = 1,\dots,l$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют последовательность экономик $\omega_n \to \omega$ и последовательность равновесных векторов цен p_n в ω_n такие, что $p_n^j \to 0$ для некоторого $j,\ 1 \leq j \leq l$. Из условия (DES) вытекает, что $(w_k)_n = \langle p_n, (x_k)_n \rangle - (\alpha_k)_n \to 0$, $k = 1,\dots,m$ (здесь $(x_k)_n = x_k(\omega_n)$, $(\alpha_k)_n = \alpha_k(\omega_n)$). Суммируя по k, мы видим, что $\langle p_n, x_n \rangle - \alpha_n = \langle p_n, x_n - y_n \rangle \to 0$ (здесь $x_n = \sum_{k=1}^m (x_k)_n$, $\alpha_n = \sum_{k=1}^m (\alpha_k)_n$, $y_n = y(\omega_n)$). Поскольку $x_n \to x = x(\omega)$, $y_n \to y = y(\omega)$, отсюда следует, что $p_n \to 0$ и, стало быть, $\langle p_n, (x_k)_n \rangle \to 0$ и $(\alpha_k)_n \to 0$, $k = 1,\dots,m$. Таким образом, $\alpha_k = \lim_n (\alpha_k)_n = 0$, $k = 1,\dots,m$, и приходим к противоречию. ■

Лемма 6. *Пусть* $\omega, \omega_n \in \Omega$, *и пусть* p_n *– последовательность равновесных векторов цен в* ω_n. *Тогда для всех* s, t, $1 \leq s,t \leq l$ *выполнено соотношение* $p^t = O(p^s)$, *т.е. существуют константы* c_{ts} *и* C_{ts}, $0 < c_{ts} < C_{ts} < \infty$ *такие, что для всех n имеют место неравенства* $c_{ts} < p_n^t / p_n^s < C_{ts}$.

Доказательство. Предположим противное. Переходя к подпоследовательности, без ущерба для общности можно считать, что p_n^t / p_n^s ограничены для всех j, $1 \leq j \leq l$, и для некоторого t, $1 \leq t \leq l$ имеем $p_n^t / p_n^s \to 0$. Тогда

$$f(p_n, \omega_n) = \sum_{k=1}^m f_k\left(\frac{p_n}{p_n^s}, \left\langle \frac{p_n}{p_n^s}, (x_k)_n \right\rangle - \frac{(\alpha_k)_n}{p_n^s}\right) = x_n - y_n.$$

Из условия (DES) следует, что $x_n^s - y_n^s - \dfrac{\alpha_n}{p_n^s} < \left\langle \dfrac{p_n}{p_n^s}, \quad x_n \right\rangle - \dfrac{\alpha_n}{p_n^s} \to 0.$

Если $\alpha(\omega) = 0$, то отсюда следует, что $x_n^s - y_n^s \to 0$ и $y^s(\omega) = x^s(\omega)$ вопреки определению Ω. Если же $\alpha(\omega) \neq 0$, то $\alpha_k(\omega) \neq 0$ для некоторого k, $1 \leq k \leq m$, и из леммы 5 следует, что $p_n^s \to \infty$, так что и в этом случае $x_n^s - y_n^s \to 0$, и мы снова приходим к противоречию. ■

Лемма 7. *Существует гиперповерхность* $\Omega_0 \subset \Omega$ *такая, что отображение* ϖ *является собственным в точке* $\omega \in \pi(W) \subset \Omega,$ *для которой хотя бы один из налогов* α_k *отличен от нуля, если и только если* $\omega \notin \Omega_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5 вытекает, что в достаточно малой окрестности ω равновесные цены отделены от нуля. Если существуют последовательность экономик $\omega_n \to \omega$ и последовательность равновесных векторов цен p_n в ω_n такие, что $p_n^j \to \infty$ для некоторого $j,\ 1 \le j \le l,$ то

$$\sum_{k=1}^{m} f_k\left(\frac{p_n}{p_n^j}, \left\langle \frac{p_n}{p_n^j}, (x_k)_n \right\rangle - \frac{(\alpha_k)_n}{p_n^j}\right) = x_n - y_n.$$

Переходя к подпоследовательности и воспользовавшись леммой 6, мы видим, что $\sum_{k=1}^{m} f_k(\overline{p}, \langle \overline{p}, x_k(\omega)\rangle) = x(\omega) - y(\omega),$ где $\overline{p} = \lim\limits_n \left(p_n / p_n^j\right).$ Подсчет дифференциалов показывает, что решения этой системы уравнений, когда p пробегает единичный симплекс цен, заметают гиперповерхность Ω_0 .

Обратно, пусть $\omega \in \pi(W) \cap \Omega_0$. Тогда ϖ не является собственным в окрестности ω. Действительно, пусть $\overline{p}$ – равновесный вектор цен в экономике чистого обмена, соответствующей ω (т.е. в экономике с $\alpha_k = 0,\ \ k = 1,\ldots,m,\ \ x_k = x_k(\omega)$), и пусть ω_n – последовательность экономик такая, что $\alpha_k(\omega_n) = \alpha_k(\omega),\ \ x_k(\omega_n) = (1+\varepsilon_{kn})x_k(\omega),\ \ k = 1,\ldots,m,$ $y(\omega_n) = y(\omega)$, где $\varepsilon_{kn} = \dfrac{\alpha_k}{n\langle \overline{p}, x_k\rangle}$. Тогда нетрудно увидеть, что $\omega_n \to \omega$, $p_n = n\overline{p}$ – равновесный вектор цен в экономике ω_n и $p_n \to \infty,$ что и доказывает несобственность ϖ в ω. ■

Следствие. *Отображение* $\pi : W \to \Omega$ *собственно над областями* $\{y \ge 0\} \setminus \{\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0\}$ *и* $\{y \le 0\} \setminus \{\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из закона Вальраса следует, что, в обозначениях доказательства леммы 7, $\langle \overline{p}, y(\omega)\rangle = 0$ при $\omega \in \Omega_0$. Поскольку $\overline{p} > 0,$ в наших областях это невозможно, так что следствие вытекает из леммы 7. ■

Замечание. В отличие от первой модели равновесие во второй модели не обязательно существует, даже если экономика ω такова, что $0 < y = y(\omega) < x = x(\omega),\ \ \alpha_k = \alpha_k(\omega) > 0,\ \ k = 1,\ldots,m.$ Действительно, предположим, что $y > x_m > 0,$ и пусть p – равновесный вектор цен в экономике ω. Тогда $\alpha = \alpha(\omega) = \langle p, y\rangle$ и $w_m = \langle p, x_m\rangle - \alpha_m = \langle p, x_m - y\rangle + \sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k,$ где w_m – доход участника m. Ясно, что $\sum\limits_{j=1}^{l} p^j \ge \beta = \dfrac{\alpha}{\max\limits_j y^j},$ и, следовательно,

$$\langle p, x_m - y\rangle \le -\sum_{j=1}^{l} p^j \min_j (y^j - x_m^j) \le -\beta \min_j (y^j - x_m^j) = \gamma(x_m, y, \alpha) < 0.$$

Поскольку $w_m \ge 0,$ отсюда вытекает, что $\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k \ge -\gamma$. Таким образом, если при фиксированных x_m, y, α выбрать $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}$ достаточно малыми (например $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} < -\gamma / (m-1)$), то равновесия в экономике ω не существует.

Итак, если изымаемые государством ресурсы достаточно велики ($y > x_k, \quad \exists k, \quad 1 \le k \le m$), то не при всех распределениях налогового бремени существует состояние равновесия. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Равновесие в экономике ω существует в следующих случаях:*

1) $y = y(\omega) \le 0, \ \alpha_k = \alpha_k(\omega) \le 0, \ k = 1,\ldots,m, \ \alpha = \alpha(\omega) < 0;$

2) $0 \le y = y(\omega) \le x_k = x_k(\omega), \ \alpha_k = \alpha_k(\omega) \ge 0, \ k = 1,\ldots,m, \ \alpha = \alpha(\omega) > 0.$

При этом для экономики общего положения в каждом из этих двух случаев существует лишь конечное (нечетное) число равновесных векторов цен.

Доказательство. В случае 1) утверждение теоремы 8 является частным случаем аналога (Зак, 2011, теорема 3) при $q = 0$ и ресурсах государства, равных $x - y \ge x$.

Перейдем к рассмотрению случая 2). Как и в первой модели, W– многообразие с краем $\partial_\Omega W = \bigcup_{i=1}^m \partial_i W$, где $\partial_i W = \{w_i = 0\}$, $w_i = \langle p, x_i \rangle - \alpha_i$, $i = 1,\ldots,m$, однако в отличие от первой модели $\dim \partial_\Omega W = \dim \Omega - 1$ и $\pi(\partial_\Omega W) \ne \Omega$.

Рассмотрим замыкание $\overline{U}$ области U в Ω, заданной условиями случая 2) теоремы 8. Заметим, что

$$\pi(\partial_i W) \cap \overline{U} = \{\omega \mid y = x_i, \ \alpha_k = 0, \ k \ne i\} \subset \partial \overline{U}.$$

Действительно, если $\omega \in \pi(\partial_i W)$, то для некоторого $p \in \mathbb{R}^l_+$ имеем $w_i = \langle p, x_i \rangle - \alpha_i = 0$ и

$$\sum_{k \ne i} f_k(p, \langle p, x_k \rangle - \alpha_k) = x - y \geqq x - x_i = \sum_{k \ne i} x_k,$$

так что из закона Вальраса следует, что $\sum_{k \ne i} \alpha_k \le 0$ вопреки условию 2).

Множество равновесных векторов цен в произвольной экономике $\omega \in \pi(\partial_i W) \cap U$ совпадает с множеством подходящим образом нормированных равновесных цен в экономике чистого обмена с участниками $1,\ldots,\hat{i},\ldots,m$, обладающими начальными запасами x_k и функциями полезности u_k, $k = 1,\ldots,m.$ В самом деле, если $\alpha_k = 0$ при $k \ne i$, $y = x_i$, а p – равновесный вектор цен, то из закона Вальраса следует что $\alpha_i = \alpha = \langle p, y \rangle = \langle p, x_i \rangle$, т.е. $w_i = 0$ и $\sum_{k \ne i} f_k(p, \langle p, x_k \rangle) = \sum_{k \ne i} x_k$ и p – равновесный вектор цен в указанной выше экономике чистого обмена, нормированный так, что $\langle p, x_i \rangle = \alpha$ (таким образом, при $i' \ne i$ имеем $\partial_i W \cap \partial_{i'} W \cap \pi^{-1}(\overline{U}) = \varnothing$).

В частности, если $\{x_1,\ldots,x_m\}$ – распределение, оптимальное по Парето, а i, $1 \le i \le m$ – некоторый участник, то $\{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_m\}$ – оптимальное по Парето распределение ресурсов $x - x_i$ между $m-1$ участниками с функциями полезности u_k, $k = 1,\ldots,\hat{i},\ldots m,$ и в экономике ω существует единственный равновесный вектор цен $p = \alpha \operatorname{grad} u_k / \langle \operatorname{grad} u_k, x_i \rangle$, где $k \ne i$ – произвольный экономический агент. Рассмотрим отображение $\overline{\pi} = \pi\big|_{\overline{U}} : \pi^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U}.$ Из предшествующих рассмотрений следует, что $\partial(\pi^{-1}(\overline{U})) = (\overline{\pi})^{-1}(\partial\overline{U})$, причем ограничение $\overline{\pi}$ на $\overline{U}\setminus\{\alpha=0\}$ собственно. Как и для первой модели, вычисление якобиана ϖ в рассмотренной в предыдущем абзаце точке (ω, p) показывает, что матрица $d_{(\omega,p)}(\overline{\pi}|_{\partial_i W})$ невырождена. Следовательно, невырождены также матрицы $d_{(\omega,p)}\pi$ и $d_{(\omega,p)}(\overline{\pi}|_{\partial\overline{U}})$. Ввиду известных результатов элементарной дифференциальной топологии (см. например, (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, п. 5(vi))),

$$\deg \pi|_U = \deg \overline{\pi}|_{U\setminus\{\alpha=0\}} = \deg \pi|_{\partial\overline{U}\setminus\{\alpha=0\}} = \pm 1,$$

что и доказывает теорему 8 в случае 2). ■

Замечание. Строго говоря, при доказательстве теоремы 8 в случае 2) мы воспользовались тем, что $m > 1$. Однако хорошо известно, что если $f(p, w)$ – индивидуальная функция спроса, порожденная функцией полезности, удовлетворяющей нашим предположениям, то отображение $f(\cdot,1):\mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}^l_+$ является диффеоморфизмом. Поэтому если $m=1$, а $y < x$ (в случае $m=1$ условие $y \le x_k$, $k=1,\ldots,m$ оказывается более слабым, чем сделанное в самом начале разд. 2 предположение, что $y < x$), то в модели существует единственное равновесие p, а именно, если $f(\overline{p},1) = x - y$, то $p = \alpha\overline{p}/\langle \overline{p}, y\rangle$.

Рассмотрим отображение $F: W \to \overline{\mathbb{R}^l_+}$,

$$F(\omega, p) = (f_1(p, \langle p, x_1\rangle - \alpha_1), \ldots, f_m(p, \langle p, x_m\rangle - \alpha_m)).$$

Тогда $F(W\setminus\partial_\Omega W) \subset \mathbf{Par}$, где

$$\mathbf{Par} = \Big\{(z_1,\ldots,z_m),\quad z_k > 0 \;\Big|\; \nexists (z_1',\ldots,z_m'),\quad z_k' > 0,\quad u_k(z_k') \ge u_k(z_k),$$
$$k=1,\ldots,m,\quad \sum_{k=1}^m z_k' = \sum_{k=1}^m z_k,\quad \sum_{k=1}^m u_k(z_k') > \sum_{k=1}^m u_k(z_k)\Big\}.$$

Предложение 3. $F(W\setminus\partial_\Omega W) = \mathbf{Par}$. *Более того, для всякого распределения* $z_1,\ldots,z_m \in \mathbf{Par}$ *существуют экономика* $\omega\in\Omega$, *удовлетворяющая любому из двух условий теоремы 8, и равновесный вектор цен* p *в* ω *такие, что* $F(p,\omega) = (z_1,\ldots,z_m)$.

Доказательство. Пусть $y \in R^l$, $|y| \le \min z_k$, $\alpha_k \in R$, $k=1,\ldots,m$ – набор данных, удовлетворяющий одному из условий теоремы 8, и пусть $p = \alpha\,\mathrm{grad}\,u_i/\langle \mathrm{grad}\,u_i, y\rangle > 0$. Хорошо известно, что p не зависит от i и является равновесным вектором цен в экономике чистого обмена с начальными запасами z_k и функциями полезности u_k, $k=1,\ldots,m$, нормированными так, что $\langle p, y\rangle = \alpha$. Положим $x_k = z_k + \alpha_k y/\alpha$, $k=1,\ldots,m$, и пусть $\omega = (x_1,\ldots,x_m;\, y;\, \alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \Omega$. Тогда $x_k \ge 0$, $y \le x_k$, $z = x - y$ и $f_k(p, \langle p, x_k\rangle - \alpha_k) = f_k(p, \langle p, z_k\rangle) = z_k$, $k=1,\ldots,m$, так что p – равновесный вектор цен в экономике ω и $F(\omega, p) = (z_1,\ldots,z_m)$. ■

Как и в первой модели, более важным представляется вопрос, в какой степени финансовые рычаги управления (налоги) позволяют государству при фиксированных начальных запасах участников x_k, $k=1,\ldots,m$ и изымаемых государством ресурсах y добиться желательного для него оптимального распределения ресурсов между участниками. Имеет место следующий аналог теоремы 2.

Теорема 9. *Фиксируем распределение начальных запасов* $\{x_k\}$, $x_k \geq 0$, $k = 1,\dots,m$, $x = \sum_{k=1}^{m} x_k > 0$, *необходимые для функционирования государства ресурсы* y, $0 \leq y < x$ *и налоговые поступления* $\alpha > 0$ (*либо выделяемые государством ресурсы* $-y \geq 0$ *и финансовую помощь* $-\alpha > 0$). *Тогда, варьируя налогообложение, государство может добиться произвольного Парето-оптимального распределения ресурсов* $x - y$ *между* m *экономическими агентами с функциями полезности* u_k, $k = 1,\dots,m$. *Точнее говоря, пусть*

$$W^{\alpha}_{\{x_k\},y} = \pi^{-1}\Big(\big\{\omega | x_k(\omega) = x_k, \quad k = 1,\dots,m, \quad y(\omega) = y, \quad \langle p, y\rangle = \alpha\big\}\Big) \setminus \partial_{\Omega} W,$$

$$F^{\alpha}_{\{x_k\},y} = F\,|_{W^{\alpha}_{\{x_k\},y}} : W^{\alpha}_{\{x_k\},y} \to \mathbf{Par}_{x-y},$$

где $\mathbf{Par}_{x-y} = \{(z_1,\dots,z_m) \in \mathbf{Par} \,\big|\, \sum_{k=1}^{m} z_k = x - y\}$. *Тогда* $F^{\alpha}_{\{x_k\},y}$ *– диффеоморфизм (и, в частности,* $F^{\alpha}_{\{x_k\},y}(W^{\alpha}_{\{x_k\},y}) = \mathbf{Par}_{x-y}$ *).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Обозначим через $B^{\alpha}_{x,y} \subset \mathbb{R}^{l}_{+} \times (\mathbb{R}_{+})^{m}$ множество бюджетных распределений, соответствующих распределениям ресурсов $x - y$ между m участниками с функциями полезности u_k, $1 \leq k \leq m$ с нормировочным условием $\langle p, y\rangle = \alpha$:

$$B^{\alpha}_{x,y} = \{(p; w_1,\dots,w_m) \,|\, p > 0, \ \langle p, y\rangle = \alpha, \ w_k > 0, \ k = 1,\dots,m, \ \sum_{k=1}^{m} f_k(p,w) = x - y\}$$

и рассмотрим отображение $\phi^{\alpha}_{x,y} : \mathbf{Par}_{x-y} \to \mathbb{R}^{l}_{+} \times (\mathbb{R}_{+})^{m}$, $\phi^{\alpha}_{x,y}(z_1,\dots,z_m) = (p; w_1,\dots,w_m)$, где

$$p = \left(\frac{\partial u_k}{\partial z^1_k},\dots,\frac{\partial u_k}{\partial z^l_k}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial u_k}{\partial z^j_k} y^j\right) > 0, \quad w_k = \langle p, z_k\rangle, \quad k = 1,\dots,m.$$

Хорошо известно (см. например, (Balasko, 1979, Appendix)), что $\phi^{\alpha}_{x,y} : \mathbf{Par}_{x-y} \to B^{\alpha}_{x,y}$ – диффеоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} W^{\alpha}_{\{x_k\},y} & \xrightarrow{F^{\alpha}_{\{x_k\},y}} & \mathbf{Par}_{x-y} \\ \psi^{\alpha}_{\{x_k\},y} \searrow & & \swarrow \phi^{\alpha}_{x,y} \\ & B^{\alpha}_{x,y} & \end{array},$$

где

$$\psi^{\alpha}_{\{x_k\},y}(x_1,\dots,x_m; y; \alpha_1,\dots,\alpha_m); p^1,\dots,p^l) = (p^1,\dots,p^l; \langle p, x_1\rangle - \alpha_1,\dots,\langle p, x_m\rangle - \alpha_m).$$

Ранее было показано, что $\phi^{\alpha}_{x,y}$ диффеоморфизм. Утверждение теоремы следует теперь из того, что $\psi^{\alpha}_{\{x_k\},y}$ также является диффеоморфизмом, причем

$$(\psi^{\alpha}_{\{x_k\},y})^{-1}(p^1,\dots,p^l; w_1,\dots,w_m) = (x_1,\dots,x_m; p^1,\dots,p^l; \langle p, x_1\rangle - w_1,\dots,\langle p, x_m\rangle - w_m). \ \blacksquare$$

Следствие. *Фиксируем распределение начальных запасов* $\{x_k\}$, $x_k \geq 0$, $k = 1,\dots,m$, $x = \sum_{k=1}^{m} x_k > 0$ *и сумму налоговых поступлений* $\alpha > 0$. *Пусть* $\{z_1,\dots,z_m; y\} \in \mathbf{Pars}_x$ *– произвольное Парето-оптимальное распределение. Тогда при подходящем распределении налогов* α_k, $k = 1,\dots,m$, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \alpha$, $\{z_1,\dots,z_m\}$ *– равновесное распределение в экономике* $\omega = \{x_1,\dots,x_m; y; \alpha_1,\dots,\alpha_m\}$.

Замечание. Напомним, что, вообще говоря, $\overline{\pi(W^{\alpha}_{\{x_k\},y})} \neq$ $\neq \{\omega \in \Omega \mid x_k(\omega) = x_k,\ k = 1,\dots,m,\ y(\omega) = y\}$. Кроме того, из доказательства теоремы 9 видно, что для заданного распределения $\{z_k\} \in \mathbf{Par}_{x-y}$ величины α_k могут иметь разный знак. Однако нетрудно убедиться, что если, в обозначениях теоремы 9, $z_k \geqq x_k$, $k = 1,\dots,m$,

$z = \sum_{k=1}^{m} z_k \geq 0 \geq x = \sum_{k=1}^{m} x_k$ (откуда следует, что $y = x - z \leq 0$), то $\alpha_k \leq 0$,

$k = 1,\dots,m$, $\alpha < 0$ и мы находимся в условиях случая 1) теоремы 8. Если же $u_k(z_k) \leq u_k(x_k)$ (например, $z_k \leqq x_k$), то $0 \leq y = x - z \leq x_k$, $\alpha_k \geq 0$, $k = 1,\dots,m$, $\alpha > 0$ и мы находимся в условиях случая 2) теоремы 8.

Итак, во второй модели налоговое регулирование позволяет государству, присваивая необходимые ему ресурсы *y*, добиться вместе с тем желательного для себя (Парето-оптимального) распределения продуктов между участниками. У данного подхода есть два недостатка. *Во-первых*, даже малая ошибка в распределении налогового бремени может привести (если для некоторого *k*, $1 \leq k \leq m$, w_k мало) к тому, что равновесие вообще перестанет существовать. *Во-вторых*, в экономике может существовать несколько равновесий, а государство, назначая налоги, не может выбирать равновесные цены, так что в результате торговли может установиться Парето-оптимальное распределение, отличное от предпочитаемого государством. Что касается первого недостатка, замечание после следствия теоремы 9 показывает, что если государство желает, чтобы в результате выплаты налогов и осуществления торговых сделок состояние каждого из участников не улучшилось, а присваемые государством ресурсы не превосходят начальных запасов участников, то все налоги неотрицательны (т.е. государство не осуществляет выплат) и равновесие существует. Второй недостаток является общим для всех равновесных моделей, и обычный способ избежать его – наложить дополнительные условия на функции спроса.

Теорема 10. *Предположим, что все участники имеют нормальный спрос* (*т.е.* $\partial f_k / \partial w_k \geq 0$, $k = 1,\dots,m$), *совокупный спрос обладает свойством валовой заменимости, а экономика* ω *удовлетворяет одному из следующих условий.*

1. $y = y(\omega) \leq 0$, $\alpha_k = \alpha_k(\omega) \leq 0$, $k = 1,\dots,m$, $\alpha = \alpha(\omega) < 0$ (*т.е. мы находимся в условиях случая* 1) *теоремы* 8) *и выполнено одно из следующих условий*:
   - *а)* $y < 0$;
   - *б)* $\alpha_k < 0$, $k = 1,\dots,m$ *и в каждой точке W спрос хотя бы одного из участников строго нормален* (*т.е.* $\partial f_k / \partial w_k > 0$, *где k*, $1 \leq k \leq m$ *зависит от точки W*);
   - *в) спрос всех участников строго нормален*;
   - *г) совокупный спрос удовлетворяет условию сильной валовой заменимости.*
2. $0 \leq y = y(\omega) \leq x_k = x_k(\omega)$, $\alpha_k = \alpha_k(\omega) \geq 0$, $k = 1,\dots,m$, $\alpha = \alpha(\omega) > 0$ (*т.е. мы находимся в условиях случая* 2) *теоремы 8*) *и выполнено одно из следующих условий*:
   - *а)* $y < x_i$ *для некоторого i*, $1 \leq i \leq m$;
   - *б) совокупный спрос удовлетворяет условию сильной валовой заменимости.*

Тогда экономика ω *регулярна, и в ней существует единственный равновесный вектор цен.*

Доказательство. В случае 1) теорема 10 по существу является частным случаем (Зак, 2011, теорема 6). Тем не менее, поскольку в (Зак, 2011) используются другие обозначения (что может привести к недоразумению), мы приведем доказательство. Согласно случаю 1) теоремы 8, в экономике ω существует равновесный вектор цен *p*. Ясно, что

$$\det d_{(\omega,p)}\pi = \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial p^t}\right) = \det M,\ M = (m_{jt}),\ m_{jt} = -\left(\frac{\partial f^j}{\partial p^t} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_k^j}{\partial w_k}x_k^t\right).$$

Из условия теоремы следует, что $m_{jt} \le 0$ при $j \ne t$. Из условий агрегации Энгеля и Курно и формулы Эйлера вытекает, что

$$\begin{aligned} pM &= -p\frac{\partial f}{\partial p} - \sum_{k=1}^{m}\left\langle p, \frac{\partial f_k}{\partial w_k}\right\rangle x_k = f - x = -y, \\ Mp &= -\frac{\partial f}{\partial p} - \sum_{k=1}^{m}\langle p, x_k\rangle\frac{\partial f_k}{\partial w_k} = -\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{\partial f_k}{\partial w_k}. \end{aligned} \tag{5}$$

В случаях а), б) и в) отсюда следует, что M – матрица с доминирующей диагональю, удовлетворяющая условию Хокинса–Саймона, так что $M^{-1} \ge 0$ и $\det M > 0$ (Никайдо, 1972, гл. II, теорема 6.1; гл. VII, § 21.1). В случае г) при $\lambda \gg 0$ матрица $M' = \lambda\mathrm{Id} - M$ положительна. Предположим, что матрица M не является неотрицательно обратимой. Тогда из теоремы Перрона–Фробениуса следует, что если μ – максимальное собственное значение M', а e – соответствующий положительный собственный вектор, то $\lambda \le \mu$, $0 < -\langle y, e\rangle = pMe = (\lambda - \mu)\langle p, e\rangle < 0$, и приходим к противоречию. Итак, $\lambda > \mu$ и M неотрицательно обратима.

Таким образом, во всех четырех случаях а)–г) $\det M > 0$, так что ω – регулярная экономика и число точек в прообразе ω (равное количеству равновесных цен) совпадает с $|\deg\pi| = 1$ (Зак, 2010).

В случае 2) положим $M^i = (m_{jt}^i)$, где $m_{jt}^i = -\partial f^j / \partial p^t - \sum_{k\ne i} x_k^t\left(\partial f_k^j / \partial w_k\right)$. Тогда $m_{jt}^i \le 0$ при $j \ne t$ и $pM^i = -p\partial f / \partial p - \sum_{k\ne i}\langle p, \partial f_k / \partial w_k\rangle x_k = f - x + x_k = x_i - y \ge 0$. Как и при доказательстве в случае 1), мы видим, что в обоих случаях а) и б) матрица M^i неотрицательно обратима.

Заметим, что матрица M невырождена. Действительно, предположим противное, и пусть $e \ne 0$, $Me = 0$. Тогда $M^i e = \langle x_i, e\rangle\partial f_i / \partial w_i$ и $e = \langle x_i, e\rangle(M^i)^{-1}\partial f_i / \partial w_i$. Поскольку $(M^i)^{-1} \ge 0$, $\partial f_i / \partial w_i \ge 0$, отсюда следует, что без ущерба для общности можно считать, что $e \ge 0$. Но тогда $0 = p(Me) = (pM)e = -\langle y, e\rangle < 0$. Полученное противоречие показывает, что M невырождена. Следовательно, непрерывная функция $\det M$ не меняет знак на связных компонентах области $\pi^{-1}(U^0)$, где U^0 –

множество точек области U из доказательства случая 2) теоремы 8, удовлетворяющих неравенству а).

С другой стороны, поскольку $\overline{U}^0 = \overline{U}$ и $\pi(\partial_i W) \cap \overline{U} = \{\omega | y = x_i, \alpha_k = 0, \quad k \neq i\} \subset \partial \overline{U},$ из доказательства случая 2) теоремы 8 видно, что область $\pi^{-1}(\overline{U})$ связна, а $\det d\pi = \det M$ не обращается тождественно в нуль на $\partial \overline{U}.$ Поэтому $\operatorname{card}(\pi^{-1}(\omega)) = |\deg \pi| = 1,$ т.е. в ω существует единственный равновесный вектор цен. ■

Замечание. Единственность состояния равновесия в экономике с валовой заменимостью – факт привычный. Однако обычно (например, в экономике чистого обмена) это равновесие обладает важным дополнительным свойством – оно устойчиво по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования. Выясним, насколько аналогичное утверждение справедливо в нашем случае. Пусть $E(\omega, p) = f(\omega, p) - (x - y)$ – функция избыточного спроса. Вальрасовский процесс ценообразования описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений $dp / dt = E(\omega, p).$ При этом нетрудно увидеть, что, в обозначениях доказательства теоремы 10, $dE / dp = -M.$ Из доказательства теоремы 10 немедленно вытекает, что в случае 1) все собственные значения матрицы $-M$ имеют отрицательные вещественные части, так что, согласно критерию Ляпунова, процесс ценообразования в случае 1) локально устойчив. С другой стороны, в случае 2) мы показали, что матрица M обратима, но, поскольку $pM = -y \leq 0$ (см. (5)), M не является неотрицательно обратимой. Из теоремы Перрона–Фробениуса следует, что если $\lambda > 0,$ то неотрицательная матрица $M' = \lambda \mathrm{Id} - M$ имеет максимальное собственное значение $\mu > 0,$ соответствующее собственному вектору $e \geq 0.$ Поскольку M обратима, но не является неотрицательно обратимой, $\lambda < \mu,$ так что $\lambda - \mu$ – отрицательное собственное значение матрицы M, соответствующее собственному вектору e. Другими словами, у матрицы dE / dp есть положительное собственное значение и процесс ценообразования неустойчив (даже локально). Этот факт можно проиллюстрировать, проследив за поведением длины вектора цен в процессе ценообразования. Имеем $d \| p \|^2 / dt = 2\langle p, dp / dt \rangle = 2\langle p, E(\omega, p) \rangle = 2(\langle p, y \rangle - \alpha),$ так что в случае 2) большие векторы цен растут, а малые убывают (явный признак неустойчивости), в то время как в случае 1) дело обстоит как раз наоборот. Отметим также, что если для начального вектора цен p_0 выполнено соотношение Вальраса $\langle p_0, y \rangle = \alpha,$ то предыдущее рассмотрение показывает, что, как и в классическом случае, норма вектора цен остается неизменной в процессе ценообразования. Однако поскольку в нашем случае для экономики общего положения существует лишь конечное число *ненормированных* векторов цен, даже при таком выборе p_0 процесс ценообразования, как правило, не сходится.

Таким образом, хотя во второй модели, используя налоговое регулирование, государство может добиться желательного для себя распределения продуктов между участниками, а в случае валовой заменимости при достаточно естественных предположениях соответствующее состояние равновесия единственно, обычные механизмы ценообразования в случае 2) не действуют, и в этом смысле дело обстоит даже хуже, чем в стандартных моделях рыночной экономики.

Литература

Зак Ф.Л. (1981): Устойчивость экономического равновесия. Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука. С. 72–106.

Зак Ф.Л. (2010): Механизм перепродажи централизованных ресурсов по гибким ценам: структура и устойчивость равновесий. Препринт.

Милнор Дж., Уоллес А. (1972): Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир.

Никайдо Х. (1972): Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.

Полтерович В.М. (1990): Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука.

Рохлин В.А., Фукс Д.Б. (1977): Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука.

Хирш М. (1979): Дифференциальная топология М.: Мир.

Balasko Y. (1975): Some Results on Uniqueness and on Stability of Equilibria in General Equilibrium Theory // *Journal Math. Econ.* 2. № 2. P. 95–118.

Balasko Y. (1979): Budget-Constrained Pareto-Efficient Allocations // *Journal of Econ. Theory*. Vol. 21. P. 359–379.

Balasko Y., Shell K. (1985): On taxation and competitive equilibria, Optimalité et structures. Mélanges en hommage à Edouard Rossier / G. Ritschard et D. Royer (eds). Paris : Economica. P. 69–83.

Balasko Y., Shell K. (1993): Lump-Sum Taxation: the Static Economy. General Equilibrium, Growth, and Trade: the Legacy of L. McKenzie. N.Y.: Academic Press. P. 168–180.

Besharov G. (2003): Why Not Lump-Sum Taxation? [Электронный ресурс] Duke Economics WP 03-20. Режим доступа: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=444442&download=yes, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: май 2010 г.).

Debreu G. (1970): Economies with a Finite Set of Equilibria // *Econometrica*. Vol. 38. P. 387–392.

Debreu G. (1972): Smooth Preferences // *Econometrica*. Vol. 40. P. 603–616.

Hahn F. (1973): On Optimum Taxation // *Journal of Econ. Theory*. Vol. 6. P. 96–106.

Harford T. (2006): Undercover Economist: Exposing Why the Rich Are Rich, the Poor Are Poor and Why You Can Never Buy a Decent Used Car! N.Y.: Oxford University Press.

Mankiw N. G., Weinzierl M., Yagan D. (2009): Optimal Taxation in Theory and Practice // *Journal of Econ. Perspectives*. Vol. 23. № 4. P. 147–174.

Mirrlees J. (2005): The Theory of Optimum Taxation. In: «*Handbook of Mathematical Economics*» / K. Arrow and M. Intriligator (eds). Vol. 3. Ch. 24. Amsterdam: Elsevier. P. 1197–1249.

Поступила в редакцию 4 декабря 2009 г.

F.L. Zak
CEMI RAS, Moscow

Taxation in Walrasian Economy

We consider two models of lump sum taxation in pure exchange economy in which the state imposes taxes on (or offers financial aid to) economic agents characterized by their demand functions and initial resources. In the first model the state has its own preferences and uses the collected money to enter the market and maximize its utility while in the second model it uses the taxes to acquire fixed resources necessary for its functioning. We study the existence and structure of equilibria in general economies, the possibility of using taxation to realize Pareto optimal allocations, and the role of taxation as a possible cause of inflation. Special attention is paid to economies with gross substitutability. Bibliography 18 items.

Keywords: **lump sum taxation, equilibrium, pure exchange economy, regular economy, price adjustment.**

Jel classification: C65, D31, D51, D61, D63, H21, H24, H31.